BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRIỆU VĂN DŨNG

DƯỚI THÁC TRIỂN CÁC HÀM ĐA ĐIỀU DƯỚI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

Công trình được hoàn thành tại: Khoa Toán - Tin
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH Lê Mậu Hải

Phản biện 1: GS. TSKH. Phạm Hoàng Hiệp - Viện Toán Học.
Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn - Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội.
Phản biện 3: PGS. TS. Thái Thuần Quang - Đại học Quy Nhơn.

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Vào lúc .. giờ .. ngày ... tháng ... năm ...

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:
- Thư viện Quốc Gia, Hà Nội
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Việc thác triển các đối tượng của giải tích phức như thác triển hàm chỉnh hình, hàm phân hình, bó giải tích coherent, dòng, v.v... luôn được quan tâm nhiều trong giải tích phức cũng như trong lý thuyết đa thế vị phức. Một trong các đối tượng được quan tâm nghiên cứu và có thể coi là đối tượng trung tâm của lý thuyết đa thế vị là hàm đa điều hòa dưới. Do đó cũng như các đối tượng đã nói ở trên, việc xét bài toán thác triển của hàm đa điều hòa dưới là việc cần lưu tâm tới khi nghiên cứu các bài toán của lý thuyết đa thế vị. Nhưng do các hàm đa điều hòa dưới, từ định nghĩa của nó, lại được xác định nhờ bất đẳng thức tích phân, nên khi xét vấn đề này, người ta quan tâm tới bài toán dưới thác triển. Trong luận án này, chúng tôi dành phần lớn nội dung trình bày vấn đề dưới thác triển cho lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn cũng như các hàm m - điều hòa dưới không bị chặn. Các vấn đề được đề cập mới được quan tâm nghiên cứu trong khoảng 10 năm trở lại đây.

Từ năm 1998 đến 2004, Cegrell, một trong các chuyên gia hàng đầu thế giới về lý thuyết đa thế vị, đã xây dựng toán tử Monge - Ampère cho một số lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn địa phương. Ông đã đưa ra các lớp $\mathcal{E}_p(\Omega), \mathcal{F}_p(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{N}(\Omega)$ và $\mathcal{E}(\Omega)$. Đó là các lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn khác nhau trên miền siêu lồi $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mà trên đó toán tử $(dd^c.)^n$ có thể xác định được và liên tục trên các dãy giảm. Trong đó lớp $\mathcal{E}(\Omega)$ là lớp lớn nhất trên đó toán tử Monge–Ampère được xác định như là một độ đo Radon. Kể từ đó, người ta bắt đầu hướng sự quan tâm của bài toán dưới thác triển tới các lớp này.

Năm 2003, Cegrell và Zeriahi đã nghiên cứu bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ một lớp con của lớp $\mathcal{E}(\Omega)$. Các tác giả đã chứng minh được rằng: Nếu $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω, $\widetilde{u}$ sau này gọi là dưới thác triển của u từ Ω lên $\widetilde{\Omega}$. Điều đáng quan tâm ở đây là các tác giả cho một đánh giá về mass toàn thể của độ đo $(dd^c\widetilde{u})^n$ và $(dd^c u)^n$ qua bất đẳng thức $\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n \leq \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n$. Kết quả trên có thể được xem là kết quả đầu tiên cho việc nghiên cứu vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn. Sau đó năm 2008 P. H. Hiệp, năm 2009 Benelkourchi tiếp tục nghiên cứu vấn đề trên cho các lớp hàm khác như $\mathcal{E}_p(\Omega)$, $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$. Việc xét bài toán dưới thác triển trong các lớp Cegrell có giá trị biên được bắt đầu từ Czyż, Hed năm 2008. Chúng tôi sẽ trình bày kỹ hơn các kết quả của Czyż và Hed ở đầu chương 1 trong luận án này. Điều đáng nói và là chủ đề xuyên suốt trong luận án này là quan hệ thế nào giữa độ đo $(dd^c\widetilde{u})^n$ và $1_\Omega(dd^c u)^n$ với $\widetilde{u}$ là dưới thác triển của u. Phần lớn các kết quả của các tác giả như Cegrell - Zeriahi, P.H.Hiep, Benelkourchi hay Czyż và Hed chỉ dừng lại ở đánh giá được quan hệ giữa mass toàn thể của $(dd^c\widetilde{u})^n$ và mass của $(dd^c u)^n$. Do vậy, việc nghiên cứu vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới mà có thể kiểm soát được độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là một câu hỏi mở. Năm 2014, hai tác giả L. M. Hải, N.

X. Hồng đã nghiên cứu bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Điều đáng nói ở đây là họ đã chứng minh được đẳng thức về độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Do vậy một vấn đề cần nghiên cứu là liệu có thể mở rộng kết quả của hai tác giả L. M. Hải, N. X. Hồng cho lớp hàm rộng hơn, lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$?

Vấn đề tiếp theo được quan tâm nghiên cứu trong luận án này là thiết lập dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới trên các miền không bị chặn. Chúng ta biết rằng để có thể xác định được dưới thác triển $\widetilde{u}$ của u thì nói chung ta phải giải phương trình Monge - Ampère. Tuy nhiên việc giải phương trình Monge - Ampère trên miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ không phải là việc đơn giản. Năm 2014, một kết quả quan trọng trong giải phương trình Monge - Ampère cho miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ được ba tác giả L. M. Hải, N. V. Trào, N. X. Hồng đề xuất trong bài báo *"The complex Monge - Ampère equation in unbounded hyperconver domains in* $\mathbb{C}^n$*"* . Từ đó đưa ra phương hướng cho chúng tôi xét bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn. Từ kết quả này như một ứng dụng, chúng tôi nghiên cứu bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn.

Tiếp theo đó, ở chương 3 của luận án này chúng tôi xem xét dưới thác triển cho lớp hàm m - điều hòa dưới. Như đã biết, việc mở rộng lớp hàm đa điều hòa dưới trong thời gian gần đây đã được một số tác giả nghiên cứu như Z. Błocki, S. Dinew, S. Kołodziej, A. S. Sadullaev, B. I. Abullaev, L. H. Chinh, ... Năm 2005 Z. Błocki đã đưa ra khái niệm hàm m - điều hòa dưới ($SH_m(\Omega)$) và nghiên cứu lời giải cho nghiệm của phương trình Hessian thuần nhất đối với lớp này, Theo đó, năm 2012 trong công trình của mình, L. H. Chinh dựa theo ý tưởng của Cegrell đã đưa ra các lớp hàm $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$, $\mathcal{E}_m(\Omega)$ là lớp con của $SH_m(\Omega)$. Đó là các lớp hàm m - điều hòa dưới không bị chặn nhưng trên đó có thể xác định được toán tử Hessian phức, tương tự như các lớp $\mathcal{E}^0(\Omega)$, $\mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ của Cegrell đưa ra ở trên. Qua đó tác giả đã chứng minh sự tồn tại của toán tử m-Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ trên lớp hàm $\mathcal{E}_m(\Omega)$. Hơn nữa toán tử này xác định $H_m(u)$ như một độ đo Radon trên Ω. Một câu hỏi đặt ra là liệu bài toán dưới thác triển cho lớp hàm này như thế nào? Việc kiểm soát về độ đo m-Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho ra sao? Việc nghiên cứu các câu hỏi trên trong lớp hàm này vẫn là một vấn đề cần tiếp tục được quan tâm nghiên cứu.

Vấn đề cuối cùng được đề cập trong luận án là giải phương trình kiểu Monge - Ampère cho lớp Cegrell $\mathcal{N}(\Omega, f)$. Đó là phương trình dạng

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu,$$

chi tiết xem định nghĩa (4.1.1). Như ta đã biết, việc chứng minh tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge - Ampère phức đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả như Bedford and Taylor, Benelkourchi, Cegrell and Kołodziej, Zeriahi. Phần lớn các kết quả của các tác giả nói trên đã đề cập tới trường hợp độ đo μ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực của Ω. Vấn đề mà chúng tôi quan tâm là nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge - Ampère nói trên cho một độ đo tùy ý, đặc biệt là độ đo mang bởi một tập đa cực.

Vì những lý do trên, chúng tôi lựa chọn đề tài **"Dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới và ứng dụng"**.

2. Tính cấp thiết của đề tài

Như đã đề cập đến ở trên, bài toán dưới thác triển cho lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn với giá trị biên là bài toán mới xuất hiện gần đây. Hơn nữa việc thiết lập mối quan hệ giữa độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho gần như chưa được xem xét đến trừ trường hợp lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Do đó tiếp tục mở rộng bài toán trên cho các lớp khác là một bài toán cần được đặt ra và đáng quan tâm nghiên cứu. Cũng như vậy cho việc nghiên cứu dưới thác triển cho lớp hàm m - điều hòa dưới với sự kiểm soát của độ đo Hessian $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ và giải phương trình kiểu Monge - Ampère cho các độ đo có giá trên tập đa cực.

3. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Mục đích chính của luận án là nghiên cứu vấn đề dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới đối với các lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ ở đó Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$; lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu không lồi bị chặn $\mathbb{C}^n$ và dưới thác triển của các hàm m - điều hòa dưới cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là miền m - siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ngoài ra luận án còn chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge - Ampère trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ cho một độ đo bất kỳ, đặc biệt là độ đo mang bởi tập đa cực. Chúng tôi chứng minh rằng bài toán dưới trác triển cho lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là miền siêu lồi bị chặn và m - siêu lồi bị chặn là có hiệu lực. Hơn nữa chúng tôi thiết lập được đẳng thức giữa độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Cũng như vậy chúng tôi thiết lập được sự tồn tại dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ khi Ω là miền siêu lồi không bị chặn và có đẳng thức giữa độ đo như trên.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Như đã trình bày trong phần lý do chọn đề tài. Đối tượng nghiên cứu của luận án là bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng, bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng, bài toán dưới thác triển hàm m - điều hoà dưới và phương trình kiểu Monge – Ampère cho độ đo tùy ý với các điều kiện tổng quát hơn các nghiên cứu trước đó về vấn đề này. Hơn nữa, các tình huống mà chúng tôi đưa ra nghiên cứu thì các kỹ thuật và phương pháp trước đó của các tác giả khác chưa được đề cập tới.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của Luận án

Luận án góp phần làm phát triển và sâu sắc hơn các kết quả về vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới, dưới thác triền hàm m - điều hòa dưới, nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge - Ampère cho một độ đo bất kỳ. Về mặt phương pháp, Luận án góp phần làm đa dạng hóa hệ thống các công cụ và kỹ thuật nghiên cứu chuyên ngành, áp dụng cụ thể trong đề tài của Luận án và các chủ đề tương tự.

Luận án là một trong những tài liệu tham khảo cho học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc của luận án

Cấu trúc của Luận án được trình bày theo đúng quy định cụ thể đối với luận án tiến sỹ của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, bao gồm các phần: Mở đầu, Tổng quan - trình bày lịch sử vấn đề, phân tích đánh giá các công trình nghiên cứu của các tác giả trong và ngoài nước liên quan đến luận án. Bốn chương còn lại của luận án được viết dựa trên bốn công trình đã được đăng hoặc đang gửi đi công bố.

Chương 1: Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng.

Chương 2: Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng.

Chương 3: Dưới thác triển của hàm m - điều hoà dưới.

Chương 4: Phương trình kiểu Monge – Ampère cho độ đo bất kỳ.

Cuối cùng, trong phần Kết luận, chúng tôi điểm lại các kết quả nghiên cứu chính trình bày trong Luận án. Đây chính là sự khẳng định ý tưởng khoa học của đề tài Luận án đặt ra là đúng đắn và các kết quả nghiên cứu đạt được mục đích đề ra. Do đó, Luận án đã có những đóng góp cho khoa học chuyên ngành, có ý nghĩa khoa học và thực tiễn như đã nêu trong phần Mở đầu là hoàn toàn xác đáng. Đồng thời, trong Phần Kiến nghị chúng tôi mạnh dạn nêu ra một vài ý tưởng nghiên cứu tiếp theo phát triển đề tài của Luận án này. Chúng tôi hy vọng sẽ nhận được nhiều sự quan tâm và chia sẻ của đồng nghiệp giúp hoàn thiện các kết quả nghiên cứu.

7. Nơi thực hiện đề tài luận án

Trường Đại học sư phạm Hà Nội.

Tổng quan về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới và phương trình kiểu Monge–Ampère

1. Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng

Trong lý thuyết đa thế vị, toán tử Monge–Ampère là công cụ đóng vai trò trung tâm và xuyên suốt trong sự phát triển của lý thuyết này. Toán tử này được nhiều tác giả tập trung nghiên cứu mạnh mẽ bắt đầu từ nửa sau của thế kỷ thứ XX, theo hướng mô tả các lớp con của lớp các hàm đa điều hòa dưới ($PSH(\Omega)$) mà toán tử Monge–Ampère vẫn còn được xác định như một độ đo Radon, không âm, liên tục trên dãy giảm. Năm 1975, Y. Siu đã chỉ ra rằng, không thể xác định được $(dd^c u)^n$ như một độ đo Borel chính quy đối với hàm đa điều hòa dưới bất kỳ u. Năm 1982, Bedford và Taylor đã xác định được toán tử $(dd^c)^n$ trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương, lớp $PSH(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Các kết quả cơ bản khác về lý thuyết đa thế vị liên quan đến vấn đề này có thể tìm thấy trong các tài liệu E. Bedford and B. A. Taylor(1976), S. Kolodziej(1995)(2005). Tiếp tục theo hướng mở rộng miền xác định của toán tử Monge–Ampère phức nói trên, các năm 1998, 2004 và 2008, Cegrell đã mô tả nhiều lớp con của $\mathcal{PSH}(\Omega)$ với Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, trong đó có lớp $\mathcal{E}(\Omega)$ là lớp lớn nhất mà trên đó toán tử Monge–Ampère vẫn còn được xác định như là một độ đo Radon, đồng thời toán tử này vẫn liên tục trên dãy giảm của hàm đa điều hòa dưới. Điều đó có nghĩa là nếu $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ thì tồn tại $(dd^c u)^n$ và nếu $\{u_j\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $u_j \searrow u$ thì $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c u)^n$. Trong phần đầu của luận án chúng tôi nghiên cứu bài toán dưới thác triển của hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$.

Bài toán dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới được quan tâm từ các năm 80 của thế kỷ trước. El Mir năm 1980 đã cho một ví dụ chứng tỏ tồn tại một hàm đa điều hòa trên song đĩa đơn vị $\triangle^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^n :| z_1 |< 1, | z_2 |< 1\}$ sao cho hạn chế trên mọi song đĩa nhỏ hơn không có dưới thác triển lên một miền lớn hơn. Sau đó, năm 1987, Fornaess và Sibony chỉ ra đối với một miền vành trong $\mathbb{C}^2$, tồn tại một hàm đa điều hòa dưới không có dưới thác triển vào bên trong miền đó. Năm 1988, Bedford và Taylor chứng minh mọi miền bị chặn với biên trơn luôn tồn tại hàm đa điều hòa dưới trơn không có dưới thác triển lên một miền rộng hơn (nghĩa là nó là miền tồn tại của một hàm đa điều hòa dưới trơn).

Trước khi nói về vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới trên các lớp của Cegrell, ta hãy đề cập tới một vài lớp con của lớp $PSH^-(\Omega)$ trên một miền siêu lồi bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mà trên đó toán tử Monge-Ampère $(dd^c.)^n$ được xác định. Các lớp này được Cegrell đưa ra và nghiên cứu trong , các khái niệm cần thiết được đề cập đến ở đây sẽ được dùng cho chương này và các chương sau:

Định nghĩa 1 Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta xác định các lớp sau.

$$\mathcal{E}_0(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \lim_{z \to \partial\Omega} \varphi(z) = 0, \int_\Omega (dd^c\varphi)^n < \infty\big\},$$

$$\mathcal{E}(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \forall z_0 \in \Omega, \exists \text{ lân cận } U \ni z_0,$$
$$\mathcal{E}_0(\Omega) \ni \varphi_j \searrow \varphi \text{ trên } U,\ \sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < \infty\big\},$$

$$\mathcal{F}(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \exists\ \mathcal{E}_0(\Omega) \ni \varphi_j \searrow \varphi,\ \sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < \infty\big\},$$

$$\mathcal{F}^a(\Omega) = \big\{\varphi \in \mathcal{F}(\Omega) : (dd^c\varphi)^n(E) = 0, \forall E \subset \Omega \text{ là tập đa cực}\big\},$$

và với mỗi p>0,

$$\mathcal{E}_p(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \exists \mathcal{E}_0(\Omega) \ni \varphi_j \searrow \varphi, \sup_j \int_\Omega (-\varphi_j)^p (dd^c\varphi_j)^n < \infty\big\}.$$

Nhận xét: Từ định nghĩa trên ta có $\mathcal{E}_0(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$.

Năm 2003, Cegrell và Zeriahi đã nghiên cứu bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega)$. Các tác giả đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\widetilde{u} \le u$ trên Ω và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n \le \int_\Omega (dd^c u)^n.$$

Sau đó năm 2008, đối với lớp $\mathcal{E}_p(\Omega),\ p > 0$, bài toán dưới thác triển được nghiên cứu bởi Phạm Hoàng Hiệp. Phạm Hoàng Hiệp đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \Subset \mathbb{C}^n$ là những miền siêu lồi bị chặn và $u \in \mathcal{E}_p(\Omega)$, thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_p(\widetilde{\Omega})$ sao cho $\widetilde{u} \le u$ trên Ω và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (-\widetilde{u})^p (dd^c\widetilde{u})^n \le \int_\Omega (-u)^p (dd^c u)^n.$$

Ở đây tác giả đã bỏ được điều kiện Ω compact tương đối trong $\widetilde{\Omega}$.

Tiếp đến năm 2009, ba tác giả Benelkourchi, Guedj và Zeriahi đã đưa ra và nghiên cứu lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$. Benelkourchi đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm giảm với $\chi(-\infty) = +\infty$ thì với mọi $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega})$ sao cho $\widetilde{u} \le u$ trên Ω và $(dd^c\widetilde{u})^n \le (dd^c u)^n$ trên Ω và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n \le \int_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n.$$

Trong trường hợp đặc biệt nếu ta chọn $\chi(t) = (-t)^p,\ p > 0$ thì lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{E}_p(\Omega)$. Nếu $\chi(t)$ bị chặn và $\chi(0) > 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ và lúc đó kết quả dưới thác triển quay về các kết quả đã nói ở trên.

Bây giờ ta nói về dưới thác triển trong lớp có giá trị biên. Kết quả đầu tiên theo hướng này đưa ra và nghiên cứu bởi Czyż và Hed đối với lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$, Czyż và Hed đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, $n \ge 1$. Giả sử $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \ge g$ trên Ω. Khi đó với mọi hàm $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$, tồn tại dưới thác triển $v \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (dd^c v)^n \le \int_\Omega (dd^c u)^n,$$

ở đây $MPSH(\widetilde{\Omega})$ là tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên $\widetilde{\Omega}$. Ta thấy rằng trong các nghiên cứu trên của các tác giả chỉ dừng lại ở việc đánh giá được mass của độ đo Monge - Ampère toàn thể của hàm dưới

thác triển và hàm đã cho.

Năm 2014, hai tác giả Lê Mậu Hải và Nguyễn Xuân Hồng đã nghiên cứu về bài toán dưới thác triển với giá trị biên lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$, các tác giả đã phát hiện ra một kết luận mạnh hơn các kết quả đã có trước đó là độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là không thay đổi. Kết quả của họ đạt được như sau. Giả sử $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Khi đó với mọi hàm $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ với $\int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n < +\infty$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ với $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và $(dd^c \widetilde{u})^n = 1_{\Omega}(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$. Từ kết quả này ta có thể thu được các kết quả của Cegrell, Zeriahi và của Czyż, Hed

Hướng nghiên cứu của luận án là mở rộng kết quả của hai tác giả Lê Mậu Hải và Nguyễn Xuân Hồng cho lớp năng lượng phức có trọng với giá trị biên lớp $\mathcal{E}_{\chi}(\Omega, f)$. Chúng tôi đã chỉ ra bài toán dưới thác triển trong lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_{\chi}(\Omega, f)$ giải được và cho đẳng thức độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Cụ thể là,

Định lý 1.2.1. *Cho $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục giảm sao cho $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{E}_{\chi}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int\limits_{\Omega} [\chi(u) - \rho](dd^c u)^n < +\infty,$$

với ρ nào đó thuộc $\mathcal{E}_0(\Omega)$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_{\chi}(\widetilde{\Omega}, g)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$\chi(\widetilde{u})(dd^c \widetilde{u})^n = 1_{\Omega}\chi(u)(dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Để chứng minh được kết quả trên chúng tôi phải sử dụng một phương pháp chứng minh khác so với cách chứng minh truyền thống đã được sử dụng để chứng minh vấn đề trên cho các lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ hoặc $\mathcal{E}_{\chi}(\Omega)$, bởi vì lớp $\mathcal{E}_{\chi}(\Omega, f)$ không có được những tích chất tốt như là lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ và việc so sánh giữa độ đo $1_{\Omega}\chi(u)(dd^c u)^n$, $u \in \mathcal{E}_{\chi}(\Omega, f)$ với độ đo của hàm dưới thác triển là việc làm không hề đơn giản vì có sự tham gia của hàm χ. Do đó, trong quá nghiên cứu vấn đề dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}_{\chi}(\Omega, f)$ chúng tôi đã tìm ra một hướng tiếp cận mới để giải quyết vấn đề này.

2. Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng

Bài toán dưới thác triển trong các lớp Cegrell trên các miền siêu lồi bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ đã đạt được những kết quả cơ bản như đã giới thiệu ở trên. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là nếu Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ thì vấn đề dưới thác triển có giải được không? Khi đi tìm câu trả lời cho câu hỏi này chúng tôi nhận thấy đối với miền siêu lồi bị chặn thì một trong các kỹ thuật được sử dụng là giải phương trình Monge – Ampère. Do đó đến nay dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới chỉ thực hiện được trên các miền siêu lồi bị chặn bởi vì trên miền đó đã đạt được nhiều kết quả đối với việc giải phương trình Monge - Ampère. Tuy nhiên đối với miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, kết quả nhận được về giải phương trình Monge – Ampère trên các miền này còn khá hạn chế.

Năm 2014, ba tác giả Lê Mậu Hải, Nguyễn Văn Trào, Nguyễn Xuân Hồng đã nghiên cứu lời giải của phương trình Monge-Ampère trên miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$; đồng thời giới thiệu lớp Cegrell các hàm đa điều hòa dưới trên một miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Các kết quả đó được công bố trong bài báo *"The complex Monge–Ampère equation in unbounded hyperconvex domains in $\mathbb{C}^n$ "* đăng trên tạp chí Com,Var and Elliptic Equar.

Định nghĩa 2 Giả sử Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega) \neq \varnothing$. đặt

$$\mathcal{E}_0(\Omega) = \{u \in PSH^-(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega) : \forall \ \varepsilon > 0, \ \ \{u < -\varepsilon\} \Subset \Omega, \ \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n < \infty\},$$

$$\mathcal{F}(\Omega) = \big\{u \in PSH^-(\Omega) : \exists\ \ \mathcal{E}_0(\Omega) \ni u_j \searrow u,\ \ \sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty\big\},$$

và

$$\mathcal{E}(\Omega) = \big\{u \in PSH^-(\Omega) : \forall\ \ U \Subset \Omega, \exists\ \ v \in \mathcal{F}(\Omega)\ \ \text{với}\ \ v = u\ \ \text{trong}\ \ U\big\}.$$

Nếu $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ và $\mathcal{K} \in \{\mathcal{E}_0, \mathcal{F}, \mathcal{E}\}$ thì ta đặt

$$\mathcal{K}(\Omega, f) = \{u \in PSH^-(\Omega) : \exists\ \ \psi \in \mathcal{K}(\Omega),\ \psi + f \le u \le f \text{ trong } \Omega\}.$$

Nhận xét Từ định nghĩa trên ta có quan hệ bao hàm $\mathcal{E}_0(\Omega, f) \subset \mathcal{F}(\Omega, f) \subset \mathcal{E}(\Omega, f)$.

Dựa vào kết quả lời giải của phương trình Monge-Ampère trên miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ của ba tác giả nói trên cùng với kết quả nghiên cứu của hai tác giả Lê Mậu Hải, Nguyễn Xuân Hồng đã đặt ra hướng nghiên cứu tiếp theo cho luận án đó là nghiên cứu bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi nhận được kết quả sau,

Định lý 2.2.1. *Giả sử $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\widetilde{\Omega}) \cap L^\infty(\widetilde{\Omega}) \neq \varnothing$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\widetilde{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\widetilde{\Omega})$ và mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, f)$ sao cho $\widetilde{u} \le u$ trên Ω và

$$(dd^c \widetilde{u})^n = 1_\Omega (dd^c u)^n \ \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Trên cơ sở kết quả thu được, chúng tôi áp dụng vào nghiên cứu bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn. Lược sử vấn đề này là như sau.

Cho $\Omega \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega_j$, $j = 1, 2, ...$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Năm 2006, dưới giả thiết Ω là miền siêu lồi mạnh và $\lim\limits_{j\to\infty} Cap(K, \Omega_j) = Cap(K, \Omega)$, mọi tập $K \Subset \Omega$, Benelkourchi trong [**?**] đã chứng minh với mọi $u \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ tồn tại dãy tăng các hàm $u_j \in \mathcal{F}^a(\Omega_j)$ sao cho $u_j \longrightarrow u$ hầu khắp nơi trên Ω. Tiếp đó năm 2008, bỏ qua giả thiết $\lim\limits_{j\to\infty} Cap(K, \Omega_j) = Cap(K, \Omega)$, Cegrell và Hed đã chứng minh được rằng: nếu có $v \in \mathcal{N}(\Omega)$, $v < 0$ và $v_j \in \mathcal{N}(\Omega_j)$ sao cho $v_j \longrightarrow v$ hầu khắp nơi trên Ω thì với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ tồn tại dãy các hàm tăng $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ sao cho $u_j \longrightarrow u$ hầu khắp nơi trên Ω.

Đối với trường hợp có giá trị biên, năm 2010, Hed đã chứng minh kết quả trên cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Cụ thể, Hed đã chứng minh được rằng nếu có $v \in \mathcal{N}(\Omega)$, $v < 0$ và $v_j \in \mathcal{N}(\Omega_j)$ sao cho $v_j \longrightarrow v$ hầu khắp nơi trên Ω thì với mọi $f \in MPSH^-(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\Omega_1)$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

thì tồn tại dãy các hàm tăng $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \longrightarrow u$ hầu khắp nơi trên Ω.

Dùng kết quả về dưới thác triển cho miền siêu lồi không bị chặn, chúng tôi thiết lập kết quả của Hed cho các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi chứng minh được kết quả sau:

Định lý 2.3.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy các miền siêu lồi không bị chặn sao cho $\Omega \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ và $PSH^s(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1) \neq \varnothing$. Giả sử tồn tại $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$ và $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ sao cho $\psi < 0$ trên Ω và $\psi_j \nearrow \psi$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\Omega_1)$ và với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại dãy các hàm $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \nearrow u$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$.

3. Dưới thác triển của hàm m - điều hòa dưới

Trong thời gian gần đây, việc mở rộng lớp hàm đa điều hòa dưới cũng như nghiên cứu các toán tử vi phân trên các lớp hàm mở rộng này đã được một số tác giả nghiên cứu, chẳng hạn như Z. Błocki, S. Dinew, S. Kołodziej, Sadullaev, Abullaev, L. H. Chinh, ... Cụ thể họ đã đưa ra và nghiên cứu lớp hàm m-điều hòa dưới và nghiên cứu toán tử m-Hessian phức trên lớp hàm này. Các kết quả đạt được của Z. Błocki, S. Dinew, Kołodziej, Sadullaev - Abullaev, chủ yếu trên lớp hàm m-điều hòa dưới bị chặn địa phương trên các tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Các kết quả cơ bản về hàm m-điều hòa dưới và toán tử m-Hessian phức bạn đọc có thể xem các nghiên cứu của Blocki(2005), Dinew - Kołodziej(2014), Sadullaev - Abullaev(2012). Việc nghiên cứu toán tử m-Hessian phức trên lớp hàm không nhất thiết bị chặn địa phương được đưa ra và nghiên cứu trong thời gian gần đây, đặc biệt phải kể tới kết quả của L. H. Chinh(2013). Dựa theo ý tưởng của Cegrell, L. H. Chinh đã đưa ra lớp hàm $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$, $\mathcal{E}_m(\Omega)$ tương tự như các lớp $\mathcal{E}^0(\Omega)$, $\mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$. Qua đó tác giả đã chứng minh sự tồn tại của toán tử m-Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ trên lớp hàm $\mathcal{E}_m(\Omega)$. Hơn nữa toán tử này xác định một độ đo Radon trên Ω.

Trong phần tiếp theo chúng tôi xét bài toán dưới thác triển cho lớp hàm m- điều hòa dưới không bị chặn, cụ thể là cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$. Chúng tôi thấy rằng bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ trong trường hợp Ω là miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ đã được nghiên cứu trước đó bởi Vũ Việt Hùng. Tuy nhiên, kết quả dưới thác triển mà tác giả đã đạt được trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ trong trường hợp này còn nhiều hạn chế. Thứ nhất, các tác giả đã xét bài toán dưới thác triển với giả thiết Ω là miền siêu lồi compact tương đối trong $\widetilde{\Omega}$. Thứ hai, họ đã không mô tả được độ đo Hessian phức của hàm m- điều hòa dưới thác triển và hàm đã cho. Đối với vấn đề này chúng tôi đã cố gắng vượt qua những hạn chế trên. Cụ thể chúng tôi đã chứng minh được rằng tồn tại dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ trong trường hợp $\Omega, \widetilde{\Omega}$ là những miền m-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ mà không cần giả thiết rằng Ω là compact tương đối trong $\widetilde{\Omega}$. Chúng tôi cũng mô tả chính xác được độ đo Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Cụ thể chúng tôi chứng minh được định lý:

Định lý 3.2.1. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ là những miền m- siêu lồi bị chặn và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó tồn tại $w \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho $w \leq u$ trên Ω và*

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Từ định lý trên, chúng tôi đạt được hệ quả.

Hệ quả 3.2.5. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền m- siêu lồi bị chặn và $\{u_j\}_{j\geq 1}, u \subset \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho $u_j \geq u$, u_j hội tụ trong C_m- dung lượng tới u trên Ω. Giả sử $\widetilde{u}_j, \widetilde{u}$ theo thứ tự lần lượt là dưới thác triển của u_j, u trên $\widetilde{\Omega}$. Khi đó $H_m(\widetilde{u}_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(\widetilde{u})$ trên $\widetilde{\Omega}$.*

4. Phương trình kiểu Monge – Ampère cho một độ đo bất kỳ

Trong lý thuyết đa thế vị, việc tìm nghiệm của bài toán Dirichler

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ (dd^c u)^n = d\mu \\ \lim\limits_{z \to x} u(z) = \varphi(x), \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ở đó Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, μ là độ đo Borel không âm trên Ω và $\varphi \in C(\partial\Omega)$ là hàm liên tục, luôn thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả. Trong trường hợp $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi, bị chặn và $d\mu = f dV_{2n}$, $f \in C(\overline{\Omega})$ thì Bedford - Taylor (1976) đã chứng minh (1) có nghiệm duy nhất. Nếu $d\mu = f dV_{2n}$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f > 0$ và $\partial\Omega$ là trơn, các tác giả đã chứng minh (1) có nghiệm duy nhất $u \in C^\infty(\Omega)$. Một hướng để giải bài toán trên là xét sự tồn tại nghiệm của phương trình trên nếu chứng minh được sự tồn tại dưới nghiệm. Năm 1995, S. Kolodziej đã chứng minh trên miền giả lồi chặt $\Omega \subset \mathbb{C}^n$: nếu tồn tại dưới

nghiệm trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn thì phương trình (1) có nghiệm bị chặn. Năm 2009, Åhag, Cegrell, Czyż và H. Hiep đã nghiên cứu bài toán trên trên miền siêu lồi với lớp các hàm đa điều hòa dưới không nhất thiết bị chặn với giá trị biên mở rộng và thu được kết quả: giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi và $H \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MSHP(\Omega)$. Nếu có $w \in \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $\mu \leq (dd^c w)^n$ thì $\exists u \in \mathcal{E}(\Omega, H)$, $w + H \leq u \leq H$ với $(dd^c u)^n = \mu$. Tiếp tục hướng nghiên cứu việc giải phương trình Monge - Ampère, trong chương 4 của luận án chúng tôi nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge - Ampère. Đó là phương trình dạng

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu, \tag{2}$$

Việc chứng minh tồn tại nghiệm yếu của phương trình (2) đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, cụ thể:

Khi μ triệt tiêu trên các tập đa cực và $\mu(\Omega) < +\infty$, $0 \leq F(t, z) \leq g(z)$ với $g \in L^1(d\mu)$ thì, với mọi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$, Cegrell và Kołodziej đã chứng minh phương trình (2) có nghiệm $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$.

Sau đó Czyż nghiên cứu phương trình (2) trong lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$. Czyż đã chứng minh rằng: nếu μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω, F là hàm liên tục đối với biến thứ nhất và bị chặn bởi hàm khả tích $g \in L^1(d\mu)$, $0 \leq F(t, z) \leq g(z)$ và $\mu = (dd^c w)^n, w \in \mathcal{N}(\Omega)$ thì phương trình (2) giải được trong lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$.

Gần đây với giả thiết μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và tồn tại dưới nghiệm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ của (2), tức là tồn tại hàm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ sao cho $(dd^c v_0)^n \geq F(v_0, .)d\mu$, Benelkourchi đã chứng minh được rằng phương trình (2) có nghiệm $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$.

Vấn đề đặt ra ở đây chúng tôi muốn nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình (2) cho một độ đo tùy ý, đặc biệt là độ đo mang bởi một tập đa cực. Kết quả sau nói về vấn đề này.

Định lý 4.2.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn và μ là độ đo không âm trên Ω. Giả sử $F : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow (0, +\infty)$ là $dt \times d\mu$- hàm đo được thỏa mãn:*

(1) Với mọi $z \in \Omega$, hàm $t \longmapsto F(t, z)$ là hàm liên tục không giảm;

(2) Với mọi $t \in \mathbb{R}$, hàm $z \longmapsto F(t, z)$ thuộc $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$;

(3) Tồn tại hàm $w \in \mathcal{N}(\Omega)$ sao cho $(dd^c w)^n \geq F(w, .)d\mu$.

Khi đó với mỗi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ tồn tại $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu$ trên Ω.

Để giải quyết được vấn đề đặt ra chúng tôi dựa vào kết quả của việc giải phương trình Monge - Ampère cho độ đo mang bởi một tập đa cực.

Chương 1

Dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng

Như đã trình bày ở phần mở đầu. Mục đích của chương này là xét vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$.

Chương 1 gồm hai phần. Phần thứ nhất được dành để trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho chương này và các chương sau. Phần thứ hai nói định lý chính.

Các kết quả của chương này được rút ra từ bài báo [1] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án)

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Giả sử Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Ta dùng ký hiệu $PSH(\Omega)$, $PSH^-(\Omega)$ lần lượt là tập các hàm đa điều hòa dưới, đa điều hòa dưới âm trên Ω.

Định nghĩa 1.1.1. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền trong $\mathbb{C}^n$ và u là một hàm đa điều hòa dưới trên Ω ($u \in PSH(\Omega)$). Hàm $\widetilde{u} \in PSH(\widetilde{\Omega})$ được gọi là dưới thác triển của hàm u nếu $\widetilde{u}(z) \leq u(z)$, $\forall z \in \Omega$.*

Nhận xét 1.1.2. Nếu $\widetilde{u}$ là dưới thác triển của u thì tại các điểm $z \in \Omega$ mà $u(z) = -\infty$ thì $\widetilde{u}(z) = -\infty$.

Định nghĩa 1.1.3. *Tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ gọi là miền siêu lồi nếu tồn tại hàm đa điều hòa dưới $\varphi : \Omega \longrightarrow (-\infty, 0)$ sao cho với mọi $c < 0$ thì tập $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$.*

Định nghĩa 1.1.4. *Hàm đa điều hòa dưới u được gọi là hàm đa điều hòa dưới cực đại (kí hiệu $u \in MPSH(\Omega)$) nếu mọi tập compact $K \subset \Omega$ và với mọi $v \in PSH(\Omega)$, nếu $v \leq u$ trên $\Omega \setminus K$ thì $v \leq u$ trên Ω.*

Kí hiệu $MPSH^-(\Omega)$ là tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại âm.

Nhận xét 1.1.5. Như ta đã biết một hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương $u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ là đa điều hòa dưới cực đại khi và chỉ khi nếu nó thỏa mãn phương trình Monge - Ampère thuần nhất $(dd^c u)^n = 0$. Błocki đã mở rộng kết quả này cho lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.6. *Giả sử Ω là miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ là một dãy cơ bản của Ω, nghĩa là $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ là dãy các miền giả lồi chặt tăng của Ω, $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \Omega_j = \Omega$.*

Giả sử $\varphi \in PSH^-(\Omega)$. Với mỗi $j \geq 1$, đặt

$$\varphi^j = \sup\{u : u \in PSH^-(\Omega), \quad u \leq \varphi \ \text{ trên } \ \Omega \backslash \overline{\Omega}_j\}.$$

Khi đó, hàm $\widetilde{\varphi} = (\lim_{j\to\infty} \varphi^j)^* \in PSH(\Omega)$ và $\widetilde{\varphi} \in MPSH(\Omega)$. Đặt

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \widetilde{\varphi} = 0\}.$$

hoặc tương đương

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{P}SH^-(\Omega) : \varphi^j \uparrow 0\}.$$

Nhận xét 1.1.7. Từ định nghĩa trên và do nguyên lý so sánh đúng cho lớp $\mathcal{F}^a(\Omega)$ ta có quan hệ bao hàm $\mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.8. *Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm giảm và Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó hàm $u \in PSH^-(\Omega)$ thuộc $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ nếu tồn tại dãy $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ giảm tới u trên Ω và*

$$\sup_j \int_\Omega \chi(u_j)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Nhận xét 1.1.9.
a) Nếu ta chọn $\chi(t) = (-t)^p,\ p > 0$ thì lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{E}_p(\Omega)$.
b) Nếu $\chi(t)$ bị chặn và $\chi(0) > 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{F}(\Omega)$.
c) Hệ quả 3.3 của L.M.Hải và P.H.Hiệp khẳng định rằng nếu $\chi \not\equiv 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Do đó trong trường hợp này toán tử Monge-Ampère được xác định trên lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$.
d) Hệ quả 3.3 của L.M.Hải và P.H.Hiệp cũng khẳng định nếu $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega)$. Hơn nữa, ta có

$$\mathcal{E}_\chi(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{N}(\Omega) : \int_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n < +\infty \right\}.$$

Trong luận án này chúng tôi cần dùng khái niệm sau.

Định nghĩa 1.1.10. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở, μ là độ đo Borel dương trong Ω, ta nói:*
i) μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω nếu với mọi tập $A \subset \Omega$, A đa cực ta có $\mu(A) = 0$.
ii) μ gọi là được mang bởi tập đa cực nếu tồn tại tập đa cực $A \subset \Omega$, sao cho $\mu(A) = \mu(\Omega)$. Trong trường hợp này có thể viết $\mu = 1_A\mu$.

Tiếp theo, chúng tôi đề cập tới định nghĩa các lớp hàm đa điều hòa dưới có giá trị biên trong lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.11. *Giả sử $\mathcal{K} \in \{\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{N}(\Omega), \mathcal{E}_\chi(\Omega), \mathcal{E}(\Omega)\}$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Ta nói hàm đa điều hòa dưới u trên Ω thuộc $\mathcal{K}(\Omega, f)$, nếu tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{K}$ sao cho $\varphi + f \leq u \leq f$ trên Ω.*
Ký hiệu $\mathcal{K}^a(\Omega, f)$ là các hàm đa điều hòa dưới $u \in \mathcal{K}(\Omega, f)$ sao cho $\exists \varphi \in \mathcal{K}^a : \varphi + f \leq u \leq f$, ở đó $\mathcal{K}^a$ là các hàm $u \in \mathcal{K}$ sao cho $(dd^c u)^n = 0$.

Để chứng minh được Định lý 1.2.1 ta cần một số kết quả sau.

Mệnh đề 1.1.12. *Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục giảm sao cho $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$ và Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử μ là độ đo Radon, triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và $u, v \in \mathcal{E}(\Omega)$ là các hàm thỏa mãn $\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu$, $\chi(v)(dd^c v)^n \geq \mu$. Khi đó*

$$\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n \geq \mu.$$

Mệnh đề sau là một kết quả khá cơ bản không chỉ dùng để chứng minh Định lý 1.2.1 mà còn dùng được cho chứng minh các kết quả khác.

Mệnh đề 1.1.13. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int\limits_{\{u=-\infty\}\cap\Omega} (dd^c u)^n < +\infty,$$

tồn tại $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $v \geq u$ và

$$(dd^c v)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

1.2 Dưới thác triển của hàm đa điều hòa trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$

Bây giờ chúng tôi trình bày kết quả chính của chương và chứng minh kết quả chính về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới cho lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$. Đó là,

Định lý 1.2.1. *Giả sử $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục giảm sao cho $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int\limits_{\Omega} [\chi(u) - \rho](dd^c u)^n < +\infty,$$

với ρ nào đó thuộc $\mathcal{E}_0(\Omega)$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega}, g)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$\chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Để chứng minh định lý trên, ta cần vài bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.2. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

(a) $(dd^c u)^n$ mang bởi một tập đa cực.

(b) $\int\limits_\Omega (dd^c u)^n < +\infty$.

Khi đó hàm

$$\widetilde{u} := (\sup\{\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g) : \varphi \leq u \text{ trên } \Omega\})^*$$

thuộc $\mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ và $(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega (dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$.

Bổ đề sau được dùng để chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 1.2.3. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và μ là độ đo Radon dương, triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω với $\mu(\Omega) < +\infty$. Cho $\chi : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục giảm bị chặn thỏa mãn $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$ và $\chi(-\infty) = 1$. Giả sử $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ thỏa mãn $(dd^c v)^n$ mang bởi một tập đa cực và*

$$\int\limits_\Omega (dd^c v)^n < +\infty.$$

Khi đó hàm u xác định bởi

$$u := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v \text{ và } \chi(\varphi)(dd^c\varphi)^n \geq \mu\})^*$$

thuộc lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ *và*

$$\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu + (dd^c v)^n.$$

Hơn nữa, nếu $supp(dd^c v)^n \Subset \Omega$ *và* $\int\limits_{\Omega}(-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$ *với* ρ *nào đó thuộc* $\mathcal{E}_0(\Omega)$ *thì*

$$\chi(u)(dd^c u)^n = \mu + (dd^c v)^n.$$

Chương 2

Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng

Như đã trình bày ở phần mở đầu, trong chương 2 chúng tôi sẽ trình bày vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn. Phần ứng dụng chúng tôi giải quyết bài toán xấp xỉ của các hàm đa điều hòa với giá trị biên trong miền siêu lồi không bị chặn $\mathbb{C}^n$.

Chương 2 gồm ba phần. Trong phần đầu, chúng tôi trình bày một số khái niệm và mệnh đề cần thiết cho các chứng minh ở phần tiếp theo. Phần thứ hai là các bổ đề và chứng minh định lý chính. Phần thứ ba là phần ứng dụng, ở đây chúng tôi áp dụng kết quả của dưới thác triển trên miền siêu lồi không bị chặn vào bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn.

Chương 2 được viết dựa trên bài báo [2] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án).

2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Định nghĩa 2.1.1. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Hàm đa điều hòa dưới âm $u \in PSH^-(\Omega)$ gọi là hàm đa điều hòa dưới chặt nếu với mọi $U \Subset \Omega$, tồn tại $\lambda > 0$ sao cho hàm $u(z) - \lambda|z|^2 \in PSH(U)$. Nghĩa là $dd^c u \geq \lambda\beta$ trên U, trong đó $\beta = \frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ là dạng Kähler chính tắc trong $\mathbb{C}^n$.*

Kí hiệu $PSH^s(\Omega)$ là tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới chặt trong Ω.

Một kết quả của L.M.Hải, N,X.Hồng và N.V.Trào đã đưa ra Ví dụ 3.2 chứng tỏ rằng tồn tại miền siêu lồi không bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$, cụ thể họ đã đưa ra ví dụ sau đây,

Ví dụ 2.1.2. Giả sử $n \geq 1$ là số nguyên dương. Đặt $\rho(z) := 12|\Re z_1|^2 - \frac{1}{(|z_1|^2+1)^2} + \sum_{j=2}^{n} |z_j|^2$, trong đó $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_j = x_j + iy_j, j = 1, \ldots, n$. Giả sử Ω là thành phần liên thông của tập mở

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}.$$

Khi đó Ω chứa đường thẳng $(iy_1, 0)$, $y_1 \in \mathbb{R}$, nên Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và ρ là hàm đa điều hòa dưới chặt bị chặn trên Ω.

Do đó trong suốt chương này ta luôn đặt điều kiện rằng $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$, bởi vì với điều kiện đó trong trường hợp Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, Mệnh đề 4.2 của L.M.Hải, N.X.Hồng và

N.V.Trào đã cho ta một kết quả quan trọng là: Nếu $u \in \mathcal{E}(\Omega, f)$ thì $u \in \mathcal{E}(D)$ với mọi miền siêu lồi bị chặn $D \Subset \Omega$ và do đó trong trường hợp này toán tử Monge-Ampère phức $(dd^c.)^n$ được xác định trong lớp $\mathcal{E}(\Omega, f)$.

Trong chương này ta phải sử dụng các lớp $\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega)$ và $\mathcal{F}(\Omega, f)$ trong trường hợp Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$(xem Định nghĩa 1 ở phần tổng quan). Chúng ta tiếp tục phải sử dụng lớp các hàm đa điều hòa dưới cực đại, hàm đa điều hòa dưới cực đại âm trên Ω đã được nêu ra trong Định nghĩa 1.1.4 ở chương 1. Bây giờ chúng ta cho một kết quả liên quan đến lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ khi Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Mệnh đề 2.1.3. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và giả sử $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Giả sử $u, v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Khi đó ta có kết quả sau.*

(a) Nếu $u \leq v$ thì

$$\int_\Omega (dd^c u)^n \geq \int_\Omega (dd^c v)^n.$$

(b) Nếu $u \leq v$, $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ và $\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty$ thì $u = v$.

2.2 Dưới thác triển trên miền siêu lồi không bị chặn

Định lý chính của chương này là mở rộng kết quả của L.M.Hải và N.X.Hồng cho trường hợp Ω là siêu lồi không bị chặn.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\widetilde{\Omega}) \cap L^\infty(\widetilde{\Omega}) \neq \varnothing$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\widetilde{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\widetilde{\Omega})$ và mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, f)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$(dd^c \widetilde{u})^n = 1_\Omega (dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Ta cần có một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.2. *Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$. Giả sử $w \in \mathcal{E}(\Omega)$ và μ là độ đo Borel dương trong Ω sao cho $w \leq f$ trong Ω, $\mu \leq (dd^c w)^n$ trong Ω và $\int_\Omega (dd^c w)^n < \infty$. Khi đó tồn tại $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = \mu$ trong Ω.*

Bổ đề 2.2.3. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Giả sử $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy tăng các miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

thì tồn tại dãy giảm $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω và $(dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n$ trong Ω_j.

2.3 Ứng dụng

Trong phần này dùng kết quả về dưới thác triển cho miền siêu lồi không bị chặn, chúng tôi áp dụng vào giải quyết bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn. Chúng tôi thiết lập kết quả của Hed cho các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi chứng minh định lý sau đây:

Định lý 2.3.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy các miền siêu lồi không bị chặn sao cho $\Omega \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ và $PSH^s(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1) \neq \varnothing$. Giả sử tồn tại $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$ và $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ sao cho $\psi < 0$ trên Ω và $\psi_j \nearrow \psi$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\Omega_1)$ và với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại dãy các hàm $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \nearrow u$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$.

Để chứng minh Định lí 2.3.1 ta cần chứng minh một mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3.2. *Cho Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Giả sử $u \in \mathcal{E}(\Omega, f)$ sao cho $\int\limits_\Omega (dd^c u)^n < \infty$. Khi đó $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω khi $j \nearrow \infty$ và*

$$\sup_j \int\limits_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty.$$

Chương 3

Dưới thác triển của hàm m - điều hòa dưới

Như trong phần tổng quan đã giới thiệu, trong chương này chúng tôi nghiên cứu vấn đề dưới thác triển của các hàm m - điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là m - siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Chúng tôi cũng chỉ ra đẳng thức giữa độ đo Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho.

Chương 3 gồm hai phần. Trong phần thứ nhất, chúng tôi dành để trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho chương này. Phần thứ hai, chúng tôi chứng minh một số mệnh đề, bổ đề để áp dụng cho việc chứng minh kết quả dưới thác triển của hàm m - điều hòa dưới và hệ quả của nó.

Chương 3 được rút ra từ bài báo [4] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án).

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$ với dạng Kähler chính tắc $\beta = dd^c\|z\|^2$. Ta đặt,

$$\Gamma_m = \{\eta \in C_{(1,1)} : \eta \wedge \beta^{n-1} \geq 0, \ldots, \eta^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0\},$$

ở đây $C_{(1,1)}$ kí hiệu là không gian $(1,1)$ - dạng với hệ số là hằng.

Định nghĩa 3.1.1. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Ta nói rằng u là hàm m - điều hòa dưới trên Ω nếu với mọi $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1} \in \Gamma_m$ bất đẳng thức*

$$dd^c u \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0,$$

đúng theo nghĩa dòng.

Kí hiệu $SH_m(\Omega)$ là tập các hàm m- điều hòa dưới trên Ω và $SH_m^-(\Omega)$ là kí hiệu tập các hàm m- điều hòa dưới âm trên Ω.
Trước khi thiết lập các tính chất của hàm m- điều hòa dưới ta nhắc lại tính chất sau,
Giả sử $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta xác định

$$S_m(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}.$$

Kí hiệu $\mathcal{H}$ là không gian véctơ các ma trận Hermite phức cấp $n \times n$ trên $\mathbb{R}$. Với $A \in \mathcal{H}$ đặt $\lambda(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ là các giá trị riêng của A. Đặt

$$\widetilde{S}_m(A) = S_m(\lambda(A)).$$

Như trong L. Garding (1959) ta xác định

$$\widetilde{\Gamma}_m = \{A \in \mathcal{H} : \lambda(A) \in \Gamma_m\} = \{\widetilde{S}_1 \geq 0\} \cap \cdots \cap \{\widetilde{S}_m \geq 0\}.$$

Bây giờ chúng tôi liệt kê các tính chất cơ bản của lớp hàm m-điều hòa dưới. Việc chứng minh những tính chất đó được lặp lại như việc chứng minh đối với các tính chất hàm đa điều hòa dưới trong lý thuyết đa thế vị.

Mệnh đề 3.1.2. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta có*

(a) $PSH(\Omega) = SH_n(\Omega) \subset SH_{n-1}(\Omega) \subset \cdots \subset SH_1(\Omega) = SH(\Omega)$. Do đó, $u \in SH_m(\Omega)$, $1 \leq m \leq n$, thì $u \in SH_r(\Omega)$, với mọi $1 \leq r \leq m$.

(b) Nếu u thuộc lớp C^2 thì u là m- điều hòa dưới nếu và chỉ nếu $dd^c u$ thuộc $\widetilde{\Gamma}_m$ tại mỗi điểm.

(c) Nếu $u, v \in SH_m(\Omega)$ và $\alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v \in SH_m(\Omega)$.

(d) Nếu $u, v \in SH_m(\Omega)$ thì $\max\{u, v\} \in SH_m(\Omega)$.

(e) Nếu $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ là họ các hàm m- điều hòa dưới, $u = \sup_j u_j < +\infty$ và u là nửa liên tục trên thì u là hàm m- điều hòa dưới.

(f) Nếu $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy giảm các hàm m- điều hòa dưới thì hàm $u = \lim_{j \to +\infty} u_j$ là m - diều hòa dưới .

(g) Giả sử $\rho \geq 0$ là hàm bán kính trơn trong $\mathbb{C}^n$ triệt tiêu ngoài hình cầu đơn vị và thỏa mãn $\int_{\mathbb{C}^n} \rho dV_n = 1$, ở đó dV_n kí hiệu là độ đo Lebesgue của $\mathbb{C}^n$. Với $u \in SH_m(\Omega)$ ta định nghĩa

$$u_\varepsilon(z) := (u * \rho_\varepsilon)(z) = \int_{\mathbb{B}(0,\varepsilon)} u(z - \xi)\rho_\varepsilon(\xi) dV_n(\xi), \ \forall z \in \Omega_\varepsilon,$$

ở đó $\rho_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}}\rho(z/\varepsilon)$ và $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Khi đó $u_\varepsilon \in SH_m(\Omega_\varepsilon) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ và $u_\varepsilon \downarrow u$ khi $\varepsilon \downarrow 0$.

(h)Giả sử $u_1, \ldots, u_p \in SH_m(\Omega)$ và $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ là hàm lồi, tăng theo mỗi biến. Nếu χ có thể mở rộng liên tục tới hàm $[-\infty, +\infty)^p \to [-\infty, \infty)$, thì $\chi(u_1, \ldots, u_p) \in SH_m(\Omega)$.

Ví dụ 3.1.3. Xét $u(z_1, z_2, z_3) = 3|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_3|^2$. Theo tính chất (b) của mệnh đề 3.1.2 ta thấy $u \in SH_2(\mathbb{C}^3)$. Tuy nhiên, u không là đa điều hòa dưới trong $\mathbb{C}^3$ bởi vì hạn chế của u trên đường thẳng $\{(0, 0, z_3) : z_3 \in \mathbb{C}\}$ là $u(0, 0, z_3) = -|z_3|^2$ không đa điều hòa dưới.

Bây giờ, dựa theo Z. Błocki, S. Dinew và S. Kołodziej chúng ta định nghĩa toán tử m-Hessian phức cho lớp các hàm m-điều hòa dưới bị chặn địa phương. Cụ thể, chúng tôi cho định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.4. *Giả sử $u_1, \ldots, u_p \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. Khi đó toán tử Hessian phức $H_m(u_1, \ldots, u_p)$ được định nghĩa bằng quy nạp như sau:*

$$dd^c u_p \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m} = dd^c(u_p dd^c u_{p-1} \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m}).$$

Từ định nghĩa của hàm m- điều hòa dưới và sử dùng lý luận như trong chứng minh của Định lý 2.1 Bedford và Taylor(1982) ta được $H_m(u_1, \ldots, u_p)$ là dòng dương đóng song bậc $(n - m + p, n - m + p)$ và là toán tử liên tục trên dãy giảm các hàm m- điều hòa dưới bị chặn địa phương. Do đó, cho $p = m$, $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}$ là độ đo Borel không âm. Đặc biệt, khi $u = u_1 = \cdots = u_m \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ độ đo Borel

$$H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

là xác định và gọi là m - Hessian phức của u.

Tương tự định nghĩa 1.1.1 về dưới thác triển của hàm đa điều hòa dưới, ta định nghĩa dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới,

Định nghĩa 3.1.5. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và u là một hàm m-điều hòa dưới trên Ω ($u \in SH_m(\Omega)$). Hàm $\widetilde{u} \in SH_m(\widetilde{\Omega})$ được gọi là dưới thác triển của hàm u nếu $\widetilde{u}(z) \leq u(z)$, $\forall z \in \Omega$.*

Bây giờ ta nhắc lại miền m- siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ mà đã được giới thiệu bởi L.H.Chinh. Miền này được định nghĩa tương tự miền siêu lồi trong lý thuyết đa thế vị.

Định nghĩa 3.1.6. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ta nói rằng Ω là miền m- siêu lồi nếu tồn tại hàm m- điều hòa dưới liên tục $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^-$ sao cho $\Omega_c = \{u < c\} \Subset \Omega$ với mọi $c < 0$.*

Nhận xét 3.1.7. Từ định nghĩa của miền m-siêu lồi và định nghĩa của hàm m- điều hòa dưới, Ta thấy mọi hàm đa điều hòa dưới đều là m- điều hòa dưới với mọi $n \geq m \geq 1$ nên mọi miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ đều là m-siêu lồi.

Tiếp theo ta nhắc lại các lớp Cegrell của lớp hàm m- điều hòa dưới đã đưa bởi L.H.Chinh(2013, 2015).

Định nghĩa 3.1.8. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền m- siêu lồi. Khi đó ta xác định các lớp hàm m - điều hòa dưới sau:*

$$\mathcal{E}_m^0 = \mathcal{E}_m^0(\Omega) = \{u \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \lim_{z \to \partial\Omega} u(z) = 0, \quad \int_\Omega H_m(u) < \infty\}.$$

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_m(\Omega) = \big\{u \in SH_m^-(\Omega) : \exists \ \ \mathcal{E}_m^0 \ni u_j \searrow u, \ \ \sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty\big\}.$$

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(\Omega) = \big\{u \in SH_m^-(\Omega) : \forall z_0 \in \Omega, \exists \ \ \textit{lân cận} \ \ \omega \ni z_0, \quad \textit{và} \\ \mathcal{E}_m^0 \ni u_j \searrow u \ \ \textit{trên} \ \ \omega, \sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty\big\}.$$

Nhận xét 3.1.9.
a) Từ các định nghĩa trên ta có quan hệ bao hàm sau $\mathcal{E}_m^0(\Omega) \subset \mathcal{F}_m(\Omega) \subset \mathcal{E}_m(\Omega)$.
b) Tương tự như Định lý 4.5 của Cegrell(2014), Định lý 3.5 của L.H.Chinh(2013) khẳng định lớp $\mathcal{E}_m$ là lớp con lớn nhất của $SH_m^-(\Omega)$ thỏa mãn điều kiện:
(i) Nếu $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ và $v \in SH_m^-(\Omega)$ thì $\max\{u, v\} \in \mathcal{E}_m(\Omega)$.
(ii) Nếu $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ và $u_j \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega), u_j \searrow u$, thì $H_m(u_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(u)$.

Chúng ta cũng có một khái niệm tương tự như khái niệm hàm cực trị tương đối trong lý thuyết đa thế vị. Đó là khái niệm về hàm m- cực trị tương đối.

Định nghĩa 3.1.10. *Cho Ω là tập mở của $\mathbb{C}^n$ và $E \subset \Omega$. Hàm m- cực trị tương đối của E đối với Ω, được xác định bởi công thức*

$$h_{m,E,\Omega} = h_{m,E} = \sup\{u \in SH_m^-(\Omega) : u|_E \leq -1\}.$$

Như trong [?], $h^*_{m,E}$ là hàm m- điều hòa dưới âm trong Ω. Hơn nữa, nếu Ω là m- siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $\Omega' \Subset \Omega$ thì ta chứng minh được rằng $h_{m,\Omega'}$ thuộc $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$.
Tương tự như tập đa cực và định lý Josefson trong lý thuyết đa thế vị chúng ta cũng có tập m- cực và định lý Josefson cho tập m- cực.

Định nghĩa 3.1.11. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $E \subset \Omega$. E gọi là m- cực nếu với bất kỳ $a \in E$ tồn tại lân cận liên thông V_a của a trong Ω và $u \in SH_m(V), u \not\equiv -\infty$ sao cho $E \cap V_a \subset \{z \in V_a : u(z) = -\infty\}$.*

Định lý 2.35 của L.H.Chinh(2013) tương tự định lý Josefson trong lý thuyết đa thế vị đối với tập m- cực. Nghĩa là nếu $E \subset \Omega$ là tập m- cực khi và chỉ khi tồn tại hàm $u \in SH_m(\mathbb{C}^n)$ sao cho $u \equiv -\infty$ trên E.

Nhận xét 3.1.12.
a) Theo (a) của mệnh đề 3.1.2 mọi tập đa cực trong lý thuyết đa thế vị đều là tập m- cực với mọi $1 \leq m \leq n$.
b) Ví dụ 2.27 của Lữ Hoàng Chinh(2015) chứng tỏ rằng tồn tại một tập m- cực E^n trong $\mathbb{C}^n$ nhưng nó không phải là tập đa cực.

3.2 Dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày kết quả về dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$. Cụ thể chúng ta sẽ chứng minh định lý sau.

Định lý 3.2.1. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ là những miền m- siêu lồi bị chặn và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó tồn tại $w \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho $w \leq u$ trên Ω và*

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

trên $\widetilde{\Omega}$.

Trước hết chúng ta cần một mệnh đề cho lớp hàm m- điều hòa dưới $\mathcal{F}_m$.

Mệnh đề 3.2.2. *Cho Ω là miền m- siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó*

$$e_m(u) = \int_\Omega H_m(u) < \infty.$$

Ta cần dùng kết quả sau.

Mệnh đề 3.2.3. *Cho Ω là miền m- siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{u_j\} \subset \mathcal{F}_m(\Omega)$ là dãy giảm hội tụ tới $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Nếu $\varphi \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ thì*

$$\lim_j \int_\Omega \varphi H_m(u_j) = \int_\Omega \varphi H_m(u).$$

Để chứng minh Định lý 3.2.1 ta cần dùng bổ đề sau. Đây là kết quả cơ bản để chứng minh Định lý 3.2.1. Đồng thời nó cho chúng ta một kỹ thuật để tiếp cận bài toán dưới thác triển hàm m- điều hòa dưới.

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử Ω là miền m- siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó tồn tại $g \in \mathcal{F}_m^a(\Omega), h \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho*

$$1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.1}$$

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} \tag{3.2}$$

và $h \geq u \geq g + h$ trên Ω.

Từ định lý trên, chúng tôi thu được một hệ quả sau.

Hệ quả 3.2.5. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền m- siêu lồi bị chặn và $\{u_j\}_{j\geq 1}, u \subset \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho $u_j \geq u$, u_j hội tụ trong C_m- dung lượng tới u trên Ω. Giả sử $\widetilde{u_j}, \widetilde{u}$ theo thứ tự lần lượt là dưới thác triển của u_j, u trên $\widetilde{\Omega}$. Khi đó $H_m(\widetilde{u}_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(\widetilde{u})$ trên $\widetilde{\Omega}$.*

Chương 4

Phương trình kiểu Monge – Ampère cho một độ đo bất kỳ

Như đã trình bày trong phần mở đầu. Mục đích của chương nay là chúng tôi trình bày sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge – Ampère cho các độ đo bất kỳ, đặc biệt là độ đo mang bởi tập đa cực.

Chương 4 gồm hai phần. Trong phần đầu, chúng tôi giới thiệu về phương trình kiểu Monge – Ampère và hướng chứng chứng minh kết quả chính của chương. Trong phần thứ hai, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu kiểu Monge – Ampère trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ cho một độ đo bất kỳ.

Chương 4 được viết dựa trên bài báo [3] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án).

4.1 Giới thiệu

Để thuận lợi cho việc trình bày, chúng tôi xin nhắc lại khái niệm phương trình kiểu Monge-Ampère đã được đưa ra bởi Bedford, Taylor.

Định nghĩa 4.1.1. *Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và μ là độ đo Borel dương trên Ω. Giả sử $F : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ là $dt \times d\mu$ - hàm đo được. Khi đó phương trình dạng*

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu, \tag{4.1}$$

trong đó u là một hàm đa điều hòa dưới trên Ω, được gọi là phương trình kiểu Monge – Ampère.

Bedford và Taylor đã chứng minh tồn tại nghiệm của phương trình (4.1) trong trường hợp μ là độ đo Lebesgue, và $F^{\frac{1}{n}} \geq 0$ là bị chặn, liên tục, lồi, tăng theo biết thứ nhất. Sau đó Cegrell đã chứng tỏ rằng có thể bỏ qua giả thiết lồi và đơn điệu. Trong trường hợp F trơn sự tồn tại ngiệm của (4.1) đã được chứng minh. Kołodziej đã chứng minh tồn tại và duy nhất $u \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$ là nghiệm của phương trình (4.1) khi F là bị chặn, không âm, tăng và liên tục theo biết thứ nhất còn μ là độ đo Monge - Ampère của một hàm đa điều hòa dưới bị chặn và Ω là miền giả lồi chặt. Thiết lập sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (4.1) trên các lớp của Cegrell, đặc biệt là lớp $\mathcal{F}(\Omega)$,Cegrell và Kołodziej đã chứng minh nếu μ triệt tiêu trên các tập đa cực và $\mu(\Omega) < +\infty$, $0 \leq F(t, z) \leq g(z)$ với $g \in L^1(d\mu)$ thì với mọi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$, phương trình (4.1) có nghiệm $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$.

Sau đó Czyż nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (4.1) trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ lớp rộng hơn lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Czyż đã chứng minh rằng: nếu μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω, F là hàm liên tục đối với biến thứ nhất và bị chặn bởi hàm khả tích $g \in L^1(d\mu)$, $0 \leq F(t, z) \leq g(z)$ và $\mu = (dd^c w)^n, w \in \mathcal{N}(\Omega)$ thì phương trình (4.1) giải được trong lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$. Gần đây năm 2014, vẫn với giả thiết μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và tồn tại dưới nghiệm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ của (4.1), tức là tồn tại hàm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ sao cho $(dd^c v_0)^n \geq F(v_0, .)d\mu$, Benelkourchi đã chứng minh được rằng phương trình (4.1) có nghiệm $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$.

Mục đính của chương nay chúng tôi chứng minh sự tồi tại nghiệm yếu của phương trình (4.1) trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ nhưng μ có thể triệt tiêu trên các tập đa cực. Khi giải quyết bài toán trên chúng tôi gặp khó khăn là khi μ mang tập đa cực thì giải quyết như thế nào. Để giải quyết khó khăn đó trước tiên chúng tôi tìm nghiệm yếu của phần mang tập đa cực đó. Sau đó chúng tôi xây dựng một bao kiểu Perron - Bremerman các hàm đa điều hòa dưới khác với các tác giả khác để tiết tục giải phần còn lại. Chi tiết hơn bây giờ ta đi chứng minh kết quả chính của chương.

4.2 Phương trình kiểu Monge – Ampère cho một độ đo bất kỳ

Bây giờ chúng tôi chứng minh kết quả chính của chương. Cụ thể chúng tôi đạt được kết quả sau:

Định lý 4.2.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn và μ là độ đo không âm trên Ω. Giả sử $F : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ là $dt \times d\mu$- hàm đo được thỏa mãn:*

(1) Với mọi $z \in \Omega$, hàm $t \longmapsto F(t, z)$ là hàm liên tục không giảm;

(2) Với mọi $t \in \mathbb{R}$, hàm $z \longmapsto F(t, z)$ thuộc $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$;

(3) Tồn tại hàm $w \in \mathcal{N}(\Omega)$ sao cho $(dd^c w)^n \geq F(w, .)d\mu$.

Khi đó với mỗi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$, tồn tại $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu$ trên Ω.

Để chứng minh Định lý 4.2.1 trên ta cần bổ đề quan trọng sau.

Bổ đề 4.2.2. *Cho Ω, μ, F và w thỏa mãn giả thiết của định lý 4.2.1. Giả sử $w \in \mathcal{N}^a(\Omega)$, $suppd\mu \Subset \Omega$, $d\mu(\Omega) < \infty$ và $d\mu$ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω. Nếu $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $supp(dd^c v)^n \Subset \Omega$ và $(dd^c v)^n$ mang bởi một tập đa cực Ω. Khi đó hàm*

$$u := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v \text{ và } (dd^c\varphi)^n \geq F(\varphi, .)d\mu\})^*.$$

thuộc $\mathcal{N}(\Omega, f)$ và $(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n$ trong Ω.

Kết luận và kiến nghị

I. Kết luận

Luận án đã đạt được các mục đích nghiên cứu đề ra. Kết quả của Luận án góp phần làm phong phú thêm về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn trong các lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$, $\mathcal{F}(\Omega, f)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với sự kiểm soát độ đo Monge - Ampère và độ đo Hessian phức.

1) Chứng minh được sự tồn tại dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và chỉ ra đẳng thức $\chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega\chi(u)(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$.

2) Chứng minh được bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ có lời giải và chỉ ra được đẳng thức về độ đo Monge - Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho.

3) Mở rộng kết của của Hed cho bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ cho trường hợp Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

4) Chứng tỏ sự tồn tại dưới thác triển và đẳng thức giữa độ đo Hessian phức cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ các hàm m - điều hòa dưới.

5) Thiết lập được sự tồn tại nghiệm yếu thuộc lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ của phương trình kiểu Monge - Ampère cho một độ đo bất kỳ.

II. Kiến nghị

Chúng tôi nghĩ rằng trong tương lai gần, việc tìm nghiệm liên tục Holder cho phương trình kiểu Monge - Ampère đối với toán tử Monge - Ampère và toán tử Hessian là một trong các bài toán cần quan tâm và tìm ra lời giải. Đặc biệt cần nghiên cứu bài toán này cho các đối tượng rộng hơn các miền trong $\mathbb{C}^n$, chẳng hạn như trên đa tạp Kahler Compact hay tổng quát hơn trên các đa tạp Hermite. Đã có một số kết quả đạt được theo hướng này trong thời gian qua nhưng câu trả lời đầy đủ cho hướng nghiên cứu này vẫn còn xa mới đạt được.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

A. Các công trình sử dụng trong luận án.

[1] Le Mau Hai, Nguyen Xuan Hong and Trieu Van Dung (2015), "Subextension of plurisubharmonic functions with boundary values in weighted pluricomplex energy classes", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 60(11), pp. 1580-1593.(SCIE)

[2] Le Mau Hai, Nguyen Van Khiem and Trieu Van Dung (2016), "Subextension of plurisubharmonic functions in unbounded hyperconvex domains and applications", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 61(8), 1116–1132.(SCIE)

[3] Le Mau Hai, Tang Van Long and Trieu Van Dung (2016), "Equations of complex Monge-Ampère type for arbitrary measures and applications", *Int. J. Math.*, 27(4), 1650035(13 pages).(SCI)

[4] Le Mau Hai and Trieu Van Dung (2018), "Subextension of m-subharmonic functions", submitted to Vietnam J.Math.

B. Các báo cáo kết quả của luận án trong các hội nghị, hội thảo.

[1] Trieu Van Dung (2014), *"Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng"* , Báo cáo Hội nghị khoa học Khoa Toán – Tin, Trường ĐHSPHN.

[2] Trieu Van Dung (2016), *"Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng"*, Báo cáo Hội nghị khoa học Khoa Toán – Tin, Trường ĐHSPHN.

[3] Le Mau Hai, Tang Van Long, Trieu Van Dung (2016), *"Phương trình kiểu Monge – Ampère cho độ đo tùy ý và ứng dụng"* , Báo cáo Hội nghị khoa học Khoa Toán - Tin, Trường ĐHSPHN.

[4] Trieu Van Dung (2018), *"Dưới thác triển hàm m- điều hòa dươi"* , Báo cáo tại Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ 9, Nha Trang tháng 8 năm 2018.