BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRIỆU VĂN DŨNG

DƯỚI THÁC TRIỂN CÁC HÀM ĐA ĐIỀU DƯỚI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

TRIỆU VĂN DŨNG

DƯỚI THÁC TRIỂN CÁC HÀM ĐA ĐIỀU DƯỚI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9.46.01.02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Lê Mậu Hải

Hà Nội - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan Luận án này do chính tác giả thực hiện tại Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH Lê Mậu Hải. Các kết quả của Luận án là mới, đề tài của Luận án không trùng lặp và chưa được công bố trong bất cứ công trình của ai khác.

Tác giả

Triệu Văn Dũng

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, bằng tất cả sự kính trọng của mình, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới GS. TSKH Lê Mậu Hải, người thầy đã trực tiếp giảng dạy và hướng dẫn khoa học giúp tôi hoàn thành Luận án này tại Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Tôi đã thường xuyên nhận được sự chỉ dẫn khoa học cùng với sự chia sẻ, động viên khích lệ để có được sự tự tin và lòng đam mê ngay từ chặng đường đầu tiên của sự nghiệp nghiên cứu khoa học của mình.

Được sinh hoạt và làm việc cùng một tập thể khoa học nghiêm túc, tôi cảm ơn các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và toàn thể các thành viên của tổ Lý thuyết hàm Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Chính tại đây, ngoài sự chỉ dẫn, góp ý trực tiếp của các thành viên trong seminar của bộ môn Lý thuyết hàm đối với đề tài nghiên cứu, tôi còn có cơ hội trang bị cho mình về phương pháp nghiên cứu và những hiểu biết sâu sắc hơn về nhiều vấn đề Toán học. Nhân dịp này, tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn tới các thầy cô trong tổ Lý thuyết hàm đã cho tôi những góp ý rất có ý nghĩa trong quá trình làm Luận án của mình.

Tôi xin cảm ơn Lãnh đạo trường THPT Chuyên Hùng Vương, Sở giáo dục và đào tạo Phú Thọ, Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội và các đơn vị chức năng đã tạo cho tôi mọi điều kiện thuận lợi về mặt quản lý nhà nước trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tôi xin tỏ lòng tri ân đối với những đồng nghiệp, gia đình và bạn bè là những điểm tựa tinh thần vững chắc, đã giúp đỡ, động viên, chia sẻ những khó khăn và luôn đồng hành cùng tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Mục lục

Lời cam đoan 1

Lời cảm ơn 2

Kí hiệu 5

Mở đầu 6

Tổng quan về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới và phương trình kiểu Monge–Ampère 12

1 Dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng **24**

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ 24

1.2 Dưới thác triển của hàm đa điều hòa trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ 30

2 Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng **40**

2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ 41

2.2 Dưới thác triển trên miền siêu lồi không bị chặn 45

2.3 Ứng dụng 56

3 Dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới **61**

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ 61
3.2 Dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ 66

4 Phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ 80
4.1 Giới thiệu 80
4.2 Phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ . . . 82

Kết luận và kiến nghị 91

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án 93

Tài liệu tham khảo 95

KÍ HIỆU

- $PSH(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới trên Ω.
- $PSH^{-}(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới âm trên Ω.
- $\mathcal{PSH}^{s}(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới chặt trên Ω
- $SH(\Omega)$ - Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω.
- $SH^{-}(\Omega)$ - Tập các hàm điều hòa dưới âm trên Ω.
- $SH_m(\Omega)$ - Tập các hàm m-điều hòa dưới trên Ω.
- $SH_m^{-}(\Omega)$ - Tập các hàm m-điều hòa dưới âm trên Ω.
- $MPSH(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω.
- $MPSH^{-}(\Omega)$ - Tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại âm trên Ω.
- $L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ - Không gian các hàm bị chặn địa phương trên Ω.
- $L^{\infty}(\Omega)$ - Không gian các hàm bị chặn trên Ω.
- $d = \partial + \overline{\partial}$ và $d^c = \frac{i}{4}(\overline{\partial} - \partial)$, $dd^c = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}$ là các toán tử vi phân phức.
- $(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u$ - toán tử Monge-Ampère phức của u.
- $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ - toán tử Hessian phức của u.
- $\beta = dd^c\|z\|^2 = \frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$. $\beta^n = (\frac{i}{2})^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n = dV_{2n}$ là dạng thể tích của $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.
- $\mathcal{C}(\Omega)$- Tập các hàm liên tục trên Ω.
- $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$- Tập các hàm trơn vô hạn trên Ω.
- $u_j \nearrow u$ - Kí hiệu dãy $\{u_j\}$ hội tụ tăng tới u.
- $u_j \searrow u$ - Kí hiệu dãy $\{u_j\}$ hội tụ giảm tới u.
- $1_A = \chi_A$ - Kí hiệu hàm đặc trưng của tập A.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Việc thác triển các đối tượng của giải tích phức như thác triển hàm chỉnh hình, hàm phân hình, bó giải tích coherent, dòng, v.v... luôn được quan tâm nhiều trong giải tích phức cũng như trong lý thuyết đa thế vị phức. Một trong các đối tượng được quan tâm nghiên cứu và có thể coi là đối tượng trung tâm của lý thuyết đa thế vị là hàm đa điều hòa dưới. Do đó cũng như các đối tượng đã nói ở trên, việc xét bài toán thác triển của hàm đa điều hòa dưới là việc cần lưu tâm tới khi nghiên cứu các bài toán của lý thuyết đa thế vị. Nhưng do các hàm đa điều hòa dưới, từ định nghĩa của nó, lại được xác định nhờ bất đẳng thức tích phân, nên khi xét vấn đề này, người ta quan tâm tới bài toán dưới thác triển. Trong luận án này, chúng tôi dành phần lớn nội dung trình bày vấn đề dưới thác triển cho lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn cũng như các hàm m-điều hòa dưới không bị chặn. Các vấn đề được đề cập mới được quan tâm nghiên cứu trong khoảng 10 năm trở lại đây.

Từ năm 1998 đến 2004, Cegrell, một trong các chuyên gia hàng đầu thế giới về lý thuyết đa thế vị, đã xây dựng toán tử Monge-Ampère cho một số lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn địa phương. Ông đã đưa ra các lớp $\mathcal{E}_p(\Omega), \mathcal{F}_p(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{N}(\Omega)$ và $\mathcal{E}(\Omega)$. Đó là các lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn khác nhau trên miền siêu lồi $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mà trên đó toán tử $(dd^c.)^n$ có thể xác định được và liên tục trên các dãy giảm. Trong đó lớp $\mathcal{E}(\Omega)$ là lớp lớn nhất trên đó toán tử Monge–Ampère được xác định như là một độ đo Radon.

Kể từ đó, người ta bắt đầu hướng sự quan tâm của bài toán dưới thác triển tới các lớp này.

Năm 2003, Cegrell và Zeriahi trong [27] đã nghiên cứu bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ một lớp con của lớp $\mathcal{E}(\Omega)$. Các tác giả đã chứng minh được rằng: Nếu $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω, $\widetilde{u}$ sau này gọi là dưới thác triển của u từ Ω lên $\widetilde{\Omega}$. Điều đáng quan tâm ở đây là các tác giả cho một đánh giá về mass toàn thể của độ đo $(dd^c\widetilde{u})^n$ và $(dd^c u)^n$ qua bất đẳng thức $\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n \leq \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n$. Kết quả trên có thể được xem là kết quả đầu tiên cho việc nghiên cứu vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn. Sau đó P. H. Hiệp [46], Benelkourchi [10] tiếp tục nghiên cứu vấn đề trên cho các lớp hàm khác như $\mathcal{E}_p(\Omega)$, $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$. Việc xét bài toán dưới thác triển trong các lớp Cegrell có giá trị biên được bắt đầu từ Czyż, Hed năm 2008 trong [34]. Chúng tôi sẽ trình bày kỹ hơn các kết quả của Czyż và Hed ở đầu phần tổng quan trong luận án này. Điều đáng nói và là chủ đề xuyên suốt trong luận án này là quan hệ thế nào giữa độ đo $(dd^c\widetilde{u})^n$ và $1_\Omega(dd^c u)^n$ với $\widetilde{u}$ là dưới thác triển của u. Phần lớn các kết quả của các tác giả như Cegrell - Zeriahi, P.H.Hiep, Benelkourchi hay Czyż và Hed chỉ dừng lại ở đánh giá được quan hệ giữa mass toàn thể của $(dd^c\widetilde{u})^n$ và mass của $(dd^c u)^n$. Do vậy, việc nghiên cứu vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới mà có thể kiểm soát được độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là một câu hỏi mở. Năm 2014, trong [41] hai tác giả L. M. Hải, N. X. Hồng đã nghiên cứu bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Điều đáng nói ở đây là họ đã chứng minh được đẳng thức về độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Do vậy một vấn đề cần nghiên cứu là liệu có thể mở rộng kết quả trong [41] cho lớp hàm rộng hơn, lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$?

Vấn đề tiếp theo được quan tâm nghiên cứu trong luận án này là thiết lập dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới trên các miền không bị chặn. Chúng ta biết rằng để có thể xác định được dưới thác triển $\widetilde{u}$ của u

thì nói chung ta phải giải phương trình Monge-Ampère. Tuy nhiên việc giải phương trình Monge-Ampère trên miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ không phải là việc đơn giản. Năm 2014, một kết quả quan trọng trong giải phương trình Monge-Ampère cho miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ được ba tác giả L. M. Hải, N. V. Trào, N. X. Hồng đề xuất trong [44]. Từ đó đưa ra phương hướng cho chúng tôi xét bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn. Từ kết quả này như một ứng dụng, chúng tôi nghiên cứu bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn.

Tiếp theo đó, ở chương 3 của luận án này chúng tôi xem xét dưới thác triển cho lớp hàm m-điều hòa dưới. Như đã biết, việc mở rộng lớp hàm đa điều hòa dưới trong thời gian gần đây đã được một số tác giả nghiên cứu như Z. Błocki, S. Dinew, S. Kołodziej, A. S. Sadullaev, B. I. Abullaev, L. H. Chinh, ... Năm 2005 trong [15] Z. Błocki đã đưa ra khái niệm hàm m-điều hòa dưới ($SH_m(\Omega)$) và nghiên cứu lời giải cho nghiệm của phương trình Hessian thuần nhất đối với lớp này. Theo đó, năm 2012 trong công trình [31], L. H. Chinh dựa theo ý tưởng của Cegrell đã đưa ra các lớp hàm $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$, $\mathcal{E}_m(\Omega)$ là lớp con của $SH_m(\Omega)$. Đó là các lớp hàm m-điều hòa dưới không bị chặn nhưng trên đó có thể xác định được toán tử Hessian phức, tương tự như các lớp $\mathcal{E}^0(\Omega)$, $\mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ của Cegrell đưa ra ở trên. Qua đó tác giả đã chứng minh sự tồn tại của toán tử m-Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ trên lớp hàm $\mathcal{E}_m(\Omega)$. Hơn nữa toán tử này xác định $H_m(u)$ như một độ đo Radon trên Ω. Một câu hỏi đặt ra là liệu bài toán dưới thác triển cho lớp hàm này như thế nào? Việc kiểm soát về độ đo m-Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho ra sao? Việc nghiên cứu các câu hỏi trên trong lớp hàm này vẫn là một vấn đề cần tiếp tục được quan tâm nghiên cứu.

Vấn đề cuối cùng được đề cập trong luận án là giải phương trình kiểu Monge-Ampère cho lớp Cegrell $\mathcal{N}(\Omega, f)$. Đó là phương trình dạng

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu,$$

chi tiết xem định nghĩa (4.1.1). Như ta đã biết, việc chứng minh tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge-Ampère phức đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả như trong [6], [7], [12], [29], [35], [52], [62]. Phần lớn các kết quả của các tác giả nói trên đã đề cập tới trường hợp độ đo μ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực của Ω. Vấn đề mà chúng tôi quan tâm là nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge-Ampère nói trên cho một độ đo tùy ý, đặc biệt là độ đo mang bởi một tập đa cực.

Vì những lý do trên, chúng tôi lựa chọn đề tài **"Dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới và ứng dụng"**.

2. Tính cấp thiết của đề tài

Như đã đề cập đến ở trên, bài toán dưới thác triển cho lớp hàm đa điều hòa dưới không bị chặn với giá trị biên là bài toán mới xuất hiện gần đây. Hơn nữa việc thiết lập mối quan hệ giữa độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho gần như chưa được xem xét đến trừ trường hợp lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Do đó tiếp tục mở rộng bài toán trên cho các lớp khác là một bài toán cần được đặt ra và đáng quan tâm nghiên cứu. Cũng như vậy cho việc nghiên cứu dưới thác triển cho lớp hàm m-điều hòa dưới với sự kiểm soát của độ đo Hessian $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ và giải phương trình kiểu Monge-Ampère cho các độ đo có giá trên tập đa cực.

3. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Mục đích chính của Luận án là nghiên cứu vấn đề dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới đối với các lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ ở đó Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$; lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu không lồi bị chặn $\mathbb{C}^n$ và dưới thác triển của các hàm m-điều hòa dưới cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là miền m-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ngoài ra luận án còn chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge-Ampère trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ cho một độ đo bất kỳ, đặc biệt là độ đo mang bởi tập đa cực. Chúng tôi chứng minh rằng bài toán dưới trác triển cho lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là miền siêu lồi bị chặn và m-siêu lồi bị chặn là có hiệu lực. Hơn nữa chúng tôi thiết lập được đẳng thức

giữa độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Cũng như vậy chúng tôi thiết lập được sự tồn tại dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ khi Ω là miền siêu lồi không bị chặn và có đẳng thức giữa độ đo như trên.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Như đã trình bày trong phần lý do chọn đề tài. Đối tượng nghiên cứu của luận án là bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng, bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng, bài toán dưới thác triển hàm m-điều hoà dưới và phương trình kiểu Monge–Ampère cho độ đo tùy ý với các điều kiện tổng quát hơn các nghiên cứu trước đó về vấn đề này. Hơn nữa, các tình huống mà chúng tôi đưa ra nghiên cứu thì các kỹ thuật và phương pháp trước đó của các tác giả khác chưa được đề cập tới.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của Luận án

Luận án góp phần làm phát triển và sâu sắc hơn các kết quả về vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới, dưới thác triển hàm m-điều hòa dưới, nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge-Ampère cho một độ đo bất kỳ. Về mặt phương pháp, Luận án góp phần làm đa dạng hóa hệ thống các công cụ và kỹ thuật nghiên cứu chuyên ngành, áp dụng cụ thể trong đề tài của Luận án và các chủ đề tương tự.

Luận án là một trong những tài liệu tham khảo cho học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc của Luận án

Cấu trúc của Luận án được trình bày theo đúng quy định cụ thể đối với luận án tiến sỹ của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, bao gồm các phần: Mở đầu, Tổng quan - trình bày lịch sử vấn đề, phân tích đánh giá các công trình nghiên cứu của các tác giả trong và ngoài nước liên quan đến luận án. Bốn chương còn lại của luận án được viết dựa trên bốn công trình đã được đăng hoặc đang gửi đi công bố.

Chương 1: Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong

lớp năng lượng phức có trọng.

Chương 2: Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng.

Chương 3: Dưới thác triển của hàm m-điều hoà dưới.

Chương 4: Phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ.

Cuối cùng, trong phần Kết luận, chúng tôi điểm lại các kết quả nghiên cứu chính trình bày trong Luận án. Đây chính là sự khẳng định ý tưởng khoa học của đề tài Luận án đặt ra là đúng đắn và các kết quả nghiên cứu đạt được mục đích đề ra. Do đó, Luận án đã có những đóng góp cho khoa học chuyên ngành, có ý nghĩa khoa học và thực tiễn như đã nêu trong Phần mở đầu là hoàn toàn xác đáng. Đồng thời, trong Phần kiến nghị chúng tôi mạnh dạn nêu ra một vài ý tưởng nghiên cứu tiếp theo phát triển đề tài của Luận án này. Chúng tôi hy vọng sẽ nhận được nhiều sự quan tâm và chia sẻ của đồng nghiệp giúp hoàn thiện các kết quả nghiên cứu.

7. Nơi thực hiện đề tài Luận án

Trường Đại học sư phạm Hà Nội.

Tổng quan về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới và phương trình kiểu Monge–Ampère

1. Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng

Trong lý thuyết đa thế vị, toán tử Monge–Ampère là công cụ đóng vai trò trung tâm và xuyên suốt trong sự phát triển của lý thuyết này. Toán tử này được nhiều tác giả tập trung nghiên cứu mạnh mẽ bắt đầu từ nửa sau của thế kỷ thứ XX, theo hướng mô tả các lớp con của lớp các hàm đa điều hòa dưới ($PSH(\Omega)$) mà toán tử Monge–Ampère vẫn còn được xác định như một độ đo Radon, không âm, liên tục trên dãy giảm. Năm 1975, Y. Siu đã chỉ ra trong [61] rằng, không thể xác định được $(dd^c u)^n$ như một độ đo Borel chính quy đối với hàm đa điều hòa dưới bất kỳ u. Năm 1982 trong [8], Bedford và Taylor đã xác định được toán tử $(dd^c)^n$ trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương, lớp $PSH(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Các kết quả cơ bản khác về lý thuyết đa thế vị liên quan đến vấn đề này có thể tìm thấy trong các tài liệu [6], [48], [49] và [50]. Tiếp tục theo hướng mở rộng miền xác định của toán tử Monge–Ampère phức nói trên, các năm 1998, 2004 và 2008, trong các công trình [20], [21] và [23], Cegrell đã mô tả nhiều lớp con của $\mathcal{PSH}(\Omega)$ với Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, trong đó có lớp $\mathcal{E}(\Omega)$ là lớp lớn nhất mà trên đó toán tử Monge–Ampère vẫn còn được xác định như là một độ đo Radon,

đồng thời toán tử này vẫn liên tục trên dãy giảm của hàm đa điều hòa dưới. Điều đó có nghĩa là nếu $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ thì tồn tại $(dd^c u)^n$ và nếu $\{u_j\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $u_j \searrow u$ thì $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c u)^n$. Trong phần đầu của luận án chúng tôi nghiên cứu bài toán dưới thác triển của hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$.
Bài toán dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới được quan tâm từ các năm 80 của thế kỷ trước. El Mir năm 1980 đã cho một ví dụ chứng tỏ tồn tại một hàm đa điều hòa trên song đĩa đơn vị $\triangle^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^n :| z_1 |< 1, | z_2 |< 1\}$ sao cho hạn chế trên mọi song đĩa nhỏ hơn không có dưới thác triển lên một miền lớn hơn (xem [39]). Sau đó, năm 1987, Fornaess và Sibony chỉ ra đối với một miền vành trong $\mathbb{C}^2$, tồn tại một hàm đa điều hòa dưới không có dưới thác triển vào bên trong miền đó. Điều này cho thấy sự khác biệt lớn giữa hàm đa điều hòa và hàm chỉnh hình bởi do định lý Hartogs thì mọi hàm chỉnh hình $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ với $K \subset \Omega$ là tập compact luôn có thác triển chỉnh hình $\widetilde{f}$ lên Ω. Năm 1988, Bedford và Taylor chứng minh mọi miền bị chặn với biên trơn luôn tồn tại hàm đa điều hòa dưới trơn không có dưới thác triển lên một miền rộng hơn (nó là miền tồn tại của một hàm đa điều hòa dưới trơn).

Bây giờ ta nói sơ qua về dưới thác triển của hàm đa điều hòa dưới. Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền trong $\mathbb{C}^n$ và u là một hàm đa điều hòa dưới trên Ω. Hàm $\widetilde{u} \in PSH(\widetilde{\Omega})$ được gọi là dưới thác triển của hàm u nếu $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω (Định nghĩa chính xác khái niệm này xin xem trong Chương 1 của Luận án).

Trước khi nói về vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới trên các lớp của Cegrell, ta hãy đề cập tới một vài lớp con của lớp $PSH^-(\Omega)$ trên một miền siêu lồi bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mà trên đó toán tử Monge-Ampère $(dd^c.)^n$ được xác định. Các lớp này được Cegrell đưa ra và nghiên cứu trong [21], các khái niệm cần thiết được đề cập đến ở đây sẽ được dùng cho phần này và các chương sau:

Định nghĩa 1. Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta xác

định các lớp sau.

$$\mathcal{E}_0(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \lim_{z\to\partial\Omega} \varphi(z) = 0, \int_\Omega (dd^c\varphi)^n < \infty\big\},$$

$$\mathcal{E}(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \forall z_0 \in \Omega, \exists \text{ lân cận } U \ni z_0,$$
$$\mathcal{E}_0(\Omega) \ni \varphi_j \searrow \varphi \text{ trên } U, \sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < \infty\big\},$$

$$\mathcal{F}(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \exists\, \mathcal{E}_0(\Omega) \ni \varphi_j \searrow \varphi, \sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < \infty\big\},$$

$$\mathcal{F}^a(\Omega) = \big\{\varphi \in \mathcal{F}(\Omega) : (dd^c\varphi)^n(E) = 0, \forall E \subset \Omega \text{ là tập đa cực}\big\},$$

và với mỗi p>0,

$$\mathcal{E}_p(\Omega) = \big\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \exists \mathcal{E}_0(\Omega) \ni \varphi_j \searrow \varphi, \sup_j \int_\Omega (-\varphi_j)^p (dd^c\varphi_j)^n < \infty\big\}.$$

Nhận xét: Từ định nghĩa trên ta có $\mathcal{E}_0(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$.

Năm 2003, Cegrell và Zeriahi ([27]) đã nghiên cứu bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega)$. Các tác giả đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\widetilde{u} \le u$ trên Ω và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n \le \int_\Omega (dd^c u)^n.$$

Sau đó năm 2008, đối với lớp $\mathcal{E}_p(\Omega)$, $p > 0$, bài toán dưới thác triển được nghiên cứu bởi Phạm Hoàng Hiệp. Trong [46], Phạm Hoàng Hiệp đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \Subset \mathbb{C}^n$ là những miền siêu lồi bị chặn và $u \in \mathcal{E}_p(\Omega)$, thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_p(\widetilde{\Omega})$ sao cho $\widetilde{u} \le u$ trên Ω và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (-\widetilde{u})^p (dd^c\widetilde{u})^n \le \int_\Omega (-u)^p (dd^c u)^n.$$

Ở đây tác giả đã bỏ được điều kiện Ω compact tương đối trong $\widetilde{\Omega}$.

Tiếp đến năm 2009, ba tác giả Benelkourchi, Guedj và Zeriahi đã đưa ra và nghiên cứu lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ (xem [13]). Trong [10] Benelkourchi đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm giảm với $\chi(-\infty) = +\infty$ thì với mọi $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega})$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và $(dd^c\widetilde{u})^n \leq (dd^c u)^n$ trên Ω và

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n \leq \int\limits_{\Omega} \chi(u)(dd^c u)^n.$$

Trong trường hợp đặc biệt nếu ta chọn $\chi(t) = (-t)^p,\ p > 0$ thì lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{E}_p(\Omega)$. Nếu $\chi(t)$ bị chặn và $\chi(0) > 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ và lúc đó kết quả dưới thác triển quay về các kết quả đã nói ở trên.

Bây giờ ta nói về dưới thác triển trong lớp có giá trị biên. Kết quả đầu tiên theo hướng này đưa ra và nghiên cứu bởi Czyż và Hed. Trong [34], đối với lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$, Czyż và Hed đã chứng minh được rằng: nếu $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Giả sử $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Khi đó với mọi hàm $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$, tồn tại dưới thác triển $v \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ và

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n,$$

ở đây $MPSH(\widetilde{\Omega})$ là tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại trên $\widetilde{\Omega}$. Ta thấy rằng trong các nghiên cứu trên của các tác giả mới dừng lại ở việc đánh giá mass của độ đo Monge-Ampère toàn thể của hàm dưới thác triển và hàm đã cho.

Năm 2014, trong [41] hai tác giả Lê Mậu Hải và Nguyễn Xuân Hồng đã nghiên cứu về bài toán dưới thác triển với giá trị biên lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$, các tác giả đã phát hiện ra một kết luận mạnh hơn các kết quả đã có trước đó là độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là không thay đổi. Kết quả của họ đạt được như sau. Giả sử $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị

chặn trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Khi đó với mọi hàm $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ với $\int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n < +\infty$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ với $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và $(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega (dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$. Từ kết quả này ta có thể thu được các kết quả của Cegrell, Zeriahi trong [27] và của Czyż, Hed trong [34].

Hướng nghiên cứu của luận án là mở rộng kết quả của hai tác giả Lê Mậu Hải và Nguyễn Xuân Hồng cho lớp năng lượng phức có trọng với giá trị biên lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$. Chúng tôi đã chỉ ra bài toán dưới thác triển trong lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ giải được và cho đẳng thức độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Cụ thể là,

Định lý 1.2.1. *Cho $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục giảm sao cho $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int\limits_{\Omega} [\chi(u) - \rho](dd^c u)^n < +\infty,$$

với ρ nào đó thuộc $\mathcal{E}_0(\Omega)$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega}, g)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$\chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Để chứng minh được kết quả trên chúng tôi phải sử dụng một phương pháp chứng minh khác so với cách chứng minh truyền thống đã được sử dụng để chứng minh vấn đề trên cho các lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ hoặc $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$, bởi vì lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ không có được những tích chất tốt như là lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ và việc so sánh giữa độ đo $1_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n$, $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ với độ đo của hàm dưới thác triển là việc làm không hề đơn giản vì có sự tham gia của hàm χ. Do đó, trong quá trình nghiên cứu vấn đề dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ chúng tôi đã tìm ra một hướng tiếp cận mới để giải quyết vấn đề này.

2. Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng

Bài toán dưới thác triển trong các lớp Cegrell trên các miền siêu lồi bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ đã đạt được những kết quả cơ bản như đã giới thiệu trong mục 1 Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là nếu Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ thì vấn đề dưới thác triển có giải được không? Khi đi tìm câu trả lời cho câu hỏi này chúng tôi nhận thấy đối với miền siêu lồi bị chặn thì một trong các kỹ thuật được sử dụng là giải phương trình Monge–Ampère. Do đó đến nay dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới chỉ thực hiện được trên các miền siêu lồi bị chặn bởi vì trên miền đó đã đạt được nhiều kết quả đối với việc giải phương trình Monge-Ampère. Tuy nhiên đối với miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, kết quả nhận được về giải phương trình Monge–Ampère trên các miền này còn khá hạn chế.

Năm 2014 trong [44], ba tác giả Lê Mậu Hải, Nguyễn Văn Trào, Nguyễn Xuân Hồng đã nghiên cứu lời giải của phương trình Monge-Ampère trên miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$; đồng thời giới thiệu lớp Cegrell các hàm đa điều hòa dưới trên một miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Các kết quả đó được công bố trong bài báo *"The complex Monge–Ampère equation in unbounded hyperconvex domains in* $\mathbb{C}^n$*"* đăng trên tạp chí Complex Var and Elliptic Equar.

Định nghĩa 2. Giả sử Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$. Ta xác định,

$$\mathcal{E}_0(\Omega) = \{u \in PSH^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \{u < -\varepsilon\} \Subset \Omega, \ \int\limits_\Omega (dd^c u)^n < \infty\},$$

$$\mathcal{F}(\Omega) = \big\{u \in PSH^-(\Omega) : \exists \ \ \mathcal{E}_0(\Omega) \ni u_j \searrow u, \ \ \sup_j \int\limits_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty\big\},$$

và

$$\mathcal{E}(\Omega) = \big\{u \in PSH^-(\Omega) : \forall \ \ U \Subset \Omega, \exists \ \ v \in \mathcal{F}(\Omega) \ \ \text{với} \ \ v = u \ \ \text{trong} \ \ U\big\}.$$

Nếu $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ và $\mathcal{K} \in \{\mathcal{E}_0, \mathcal{F}, \mathcal{E}\}$ ta kí hiệu,

$$\mathcal{K}(\Omega, f) = \{u \in PSH^-(\Omega) : \exists \ \ \psi \in \mathcal{K}(\Omega), \ \psi + f \leq u \leq f \ \text{trong } \Omega\}.$$

Nhận xét: Từ định nghĩa trên ta có quan hệ bao hàm $\mathcal{E}_0(\Omega, f) \subset \mathcal{F}(\Omega, f) \subset \mathcal{E}(\Omega, f)$.

Dựa vào kết quả lời giải của phương trình Monge-Ampère trên miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ của ba tác giả nói trên cùng với kết quả nghiên cứu của hai tác giả Lê Mậu Hải, Nguyễn Xuân Hồng trong [41] đặt ra hướng nghiên cứu tiếp theo cho luận án đó là nghiên cứu bài toán dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi nhận được kết quả sau,

Định lý 2.2.1. *Giả sử $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\widetilde{\Omega}) \cap L^\infty(\widetilde{\Omega}) \neq \varnothing$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\widetilde{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\widetilde{\Omega})$ và mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, f)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$(dd^c \widetilde{u})^n = 1_\Omega (dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Trên cơ sở kết quả thu được, chúng tôi áp dụng vào nghiên cứu bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn. Lược sử vấn đề này là như sau.

Cho $\Omega \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega_j$, $j = 1, 2, ...$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Năm 2006, dưới giả thiết Ω là miền siêu lồi mạnh và $\lim\limits_{j\to\infty} Cap(K, \Omega_j) = Cap(K, \Omega)$, mọi tập $K \Subset \Omega$, Benelkourchi trong [9] đã chứng minh với mọi $u \in \mathcal{F}^a(\Omega)$ tồn tại dãy tăng các hàm $u_j \in \mathcal{F}^a(\Omega_j)$ sao cho $u_j \longrightarrow u$ hầu khắp nơi trên Ω. Tiếp đó năm 2008, bỏ qua giả thiết $\lim\limits_{j\to\infty} Cap(K, \Omega_j) = Cap(K, \Omega)$, Cegrell và Hed đã chứng minh được rằng: nếu có $v \in \mathcal{N}(\Omega)$, $v < 0$ và $v_j \in \mathcal{N}(\Omega_j)$ sao cho $v_j \longrightarrow v$ hầu khắp nơi trên Ω thì với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ tồn tại dãy các hàm tăng $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ sao cho $u_j \longrightarrow u$ hầu khắp nơi trên Ω (xem [25]).

Đối với trường hợp có giá trị biên, năm 2010, Hed trong [38] đã chứng minh kết quả trên cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Cụ thể, Hed đã chứng minh được rằng nếu có

$v \in \mathcal{N}(\Omega)$, $v < 0$ và $v_j \in \mathcal{N}(\Omega_j)$ sao cho $v_j \longrightarrow v$ hầu khắp nơi trên Ω thì với mọi $f \in MPSH^-(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\Omega_1)$ và $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

thì tồn tại dãy các hàm tăng $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \longrightarrow u$ hầu khắp nơi trên Ω.

Dùng kết quả về dưới thác triển cho miền siêu lồi không bị chặn, chúng tôi thiết lập kết quả của Hed cho các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi chứng minh được kết quả sau:

Định lý 2.3.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy các miền siêu lồi không bị chặn sao cho $\Omega \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ và $PSH^s(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1) \neq \varnothing$. Giả sử tồn tại $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$ và $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ sao cho $\psi < 0$ trên Ω và $\psi_j \nearrow \psi$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\Omega_1)$ và với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại dãy các hàm $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \nearrow u$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$.

3. Dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới

Trong thời gian gần đây, việc mở rộng lớp hàm đa điều hòa dưới cũng như nghiên cứu các toán tử vi phân trên các lớp hàm mở rộng này đã được một số tác giả nghiên cứu, chẳng hạn như Z. Błocki, S. Dinew, S. Kołodziej, A. S. Sadullaev, B. I. Abullaev, L. H. Chinh, ... Cụ thể họ đã đưa ra và nghiên cứu lớp hàm m-điều hòa dưới và nghiên cứu toán tử m-Hessian phức trên lớp hàm này. Các kết quả đạt được của Z. Błocki, S. Dinew, S. Kołodziej, A. S. Sadullaev và B. I. Abullaev, chủ yếu trên lớp hàm m-điều hòa dưới bị chặn địa phương trên các tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Các kết quả cơ bản về hàm m-điều hòa dưới và toán tử m-Hessian phức bạn đọc có thể xem trong [15], [36] và [53]. Việc nghiên cứu toán tử m-Hessian phức trên lớp hàm không nhất thiết

bị chặn địa phương được đưa ra và nghiên cứu trong thời gian gần đây, đặc biệt phải kể tới kết quả của L. H. Chinh trong [31]. Dựa theo ý tưởng của Cegrell, L. H. Chinh đã đưa ra lớp hàm $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$, $\mathcal{E}_m(\Omega)$ tương tự như các lớp $\mathcal{E}^0(\Omega)$, $\mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$. Qua đó tác giả đã chứng minh sự tồn tại của toán tử m-Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ trên lớp hàm $\mathcal{E}_m(\Omega)$. Hơn nữa toán tử này xác định một độ đo Radon trên Ω.

Trong phần tiếp theo chúng tôi xét bài toán dưới thác triển cho lớp hàm m-điều hòa dưới không bị chặn, cụ thể là cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$. Chúng tôi thấy rằng bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ trong trường hợp Ω là miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ đã được nghiên cứu trước đó trong [55]. Tuy nhiên, kết quả dưới thác triển mà tác giả đã đạt được trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ trong trường hợp này còn nhiều hạn chế. Thứ nhất, các tác giả đã xét bài toán dưới thác triển với giả thiết Ω là miền siêu lồi compact tương đối trong $\widetilde{\Omega}$. Thứ hai, họ đã không mô tả được được độ đo Hessian phức của hàm m-điều hòa dưới thác triển và hàm đã cho. Đối với vấn đề này chúng tôi đã cố gắng vượt qua những hạn chế trên. Cụ thể chúng tôi đã chứng minh được rằng tồn tại dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ trong trường hợp $\Omega, \widetilde{\Omega}$ là những miền m-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ mà không cần giả thiết rằng Ω là compact tương đối trong $\widetilde{\Omega}$. Chúng tôi cũng mô tả chính xác được độ đo Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho. Cụ thể chúng tôi chứng minh được định lý:

Định lý 3.2.1. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ là những miền m-siêu lồi bị chặn và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó tồn tại $w \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho $w \leq u$ trên Ω và*

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

trên $\widetilde{\Omega}$.

Từ định lý trên, chúng tôi đạt được hệ quả.

Hệ quả 3.2.5. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền m-siêu lồi bị chặn và $\{u_j\}_{j\geq 1}, u \subset \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho $u_j \geq u$, u_j hội tụ trong C_m- dung lượng tới u trên Ω. Giả sử $\widetilde{u}_j, \widetilde{u}$ theo thứ tự lần lượt là dưới thác triển của u_j, u trên $\widetilde{\Omega}$. Khi đó $H_m(\widetilde{u}_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(\widetilde{u})$ trên $\widetilde{\Omega}$.*

4. Phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ

Trong lý thuyết đa thế vị, việc tìm nghiệm của bài toán Dirichler

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ (dd^c u)^n = d\mu \\ \lim\limits_{z \to x} u(z) = \varphi(x), \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ở đó Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, μ là độ đo Borel không âm trên Ω và $\varphi \in C(\partial\Omega)$ là hàm liên tục, luôn thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả. Trong trường hợp $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi, bị chặn và $d\mu = f dV_{2n}$, $f \in C(\overline{\Omega})$ thì Bedford - Taylor trong [6] đã chứng minh (1) có nghiệm duy nhất. Nếu $d\mu = f dV_{2n}$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f > 0$ và $\partial\Omega$ là trơn thì trong [18], các tác giả đã chứng minh (1) có nghiệm duy nhất $u \in C^\infty(\Omega)$. Một hướng để giải bài toán trên là xét sự tồn tại nghiệm của phương trình trên nếu chứng minh được sự tồn tại dưới nghiệm. Năm 1995, S. Kolodziej trong [49] đã chứng minh trên miền giả lồi chặt $\Omega \subset \mathbb{C}^n$: nếu tồn tại dưới nghiệm trên lớp các hàm đa điều hòa dưới bị chặn thì phương trình (1) có nghiệm bị chặn. Năm 2009, Åhag, Cegrell, Czyż và H. Hiep trong [5] đã nghiên cứu bài toán trên trên miền siêu lồi với lớp các hàm đa điều hòa dưới không nhất thiết bị chặn với giá trị biên mở rộng và thu được kết quả: giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền siêu lồi và $H \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MSHP(\Omega)$. Nếu có $w \in \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $\mu \leq (dd^c w)^n$ thì $\exists u \in \mathcal{E}(\Omega, H)$, $w + H \leq u \leq H$ với $(dd^c u)^n = \mu$ (xem Định lý 4.14 trong [5]). Tiếp tục hướng nghiên cứu việc giải phương trình Monge-Ampère, trong chương 4 của luận án chúng tôi nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge-Ampère. Đó là phương trình dạng

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu, \tag{2}$$

chi tiết xem định nghĩa (4.1.1). Việc chứng minh tồn tại nghiệm yếu của phương trình (2) đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả trong [6], [7], [12], [29], [35], [52], [62], cụ thể:

Khi μ triệt tiêu trên các tập đa cực và $\mu(\Omega) < +\infty$, $0 \leq F(t,z) \leq g(z)$ với $g \in L^1(d\mu)$ thì, với mọi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$, Cegrell và Kołodziej trong [29] đã chứng minh phương trình (2) có nghiệm $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$.

Sau đó trong [35] Czyż nghiên cứu phương trình (2) trong lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$. Czyż đã chứng minh rằng: nếu μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω, F là hàm liên tục đối với biến thứ nhất và bị chặn bởi hàm khả tích $g \in L^1(d\mu)$, $0 \leq F(t,z) \leq g(z)$ và $\mu = (dd^c w)^n, w \in \mathcal{N}(\Omega)$ thì phương trình (2) giải được trong lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$.

Gần đây với giả thiết μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và tồn tại dưới nghiệm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ của (2), tức là tồn tại hàm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ sao cho $(dd^c v_0)^n \geq F(v_0, .)d\mu$, Benelkourchi trong [12] đã chứng minh được rằng phương trình (2) có nghiệm $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$.

Vấn đề đặt ra ở đây chúng tôi muốn nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình (2) cho một độ đo tùy ý, đặc biệt là độ đo mang bởi một tập đa cực. Kết quả sau nói về vấn đề này.

Định lý 4.2.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn và μ là độ đo không âm trên Ω. Giả sử $F : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow (0, +\infty)$ là $dt \times d\mu$- hàm đo được thỏa mãn:*

(1) Với mọi $z \in \Omega$, hàm $t \longmapsto F(t,z)$ là hàm liên tục không giảm;

(2) Với mọi $t \in \mathbb{R}$, hàm $z \longmapsto F(t,z)$ thuộc $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$;

(3) Tồn tại hàm $w \in \mathcal{N}(\Omega)$ sao cho $(dd^c w)^n \geq F(w, .)d\mu$.

Khi đó với mỗi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ tồn tại $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu$ trên Ω.

Để giải quyết được vấn đề đặt ra chúng tôi không sử dụng phương pháp chứng minh đã được đưa ra trong [29], [35], [12]. Trong các nghiên cứu [29], [35], [12] để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (2) các tác giả đã sử dụng định lý về điểm bất động Schauder - Tikhonov. Ở đây chúng tôi dựa vào kết quả của việc giải phương trình Monge-Ampère cho độ đo mang bởi một tập đa cực trong [5].

Các vấn đề đặt ra trên đây sẽ được chúng tôi giải quyết và trình bày lần

lượt trong bốn chương, với sự ý thức được rằng, các kết quả và nội dung chính của luận án, xoay quanh vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới và ứng dụng.

Chương 1

Dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng

Như đã trình bày ở Phần mở đầu. Mục đích của chương này là xét vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$.

Chương 1 gồm hai phần. Phần thứ nhất trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho chương này và các chương sau. Phần thứ hai chứng minh định lý chính.

Các kết quả của chương này được rút ra từ bài báo [1] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án)

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Giả sử Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Ta dùng ký hiệu $PSH(\Omega)$, $PSH^-(\Omega)$ lần lượt là tập các hàm đa điều hòa dưới, đa điều hòa dưới âm trên Ω.

Định nghĩa 1.1.1. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền trong $\mathbb{C}^n$ và u là một hàm đa điều hòa dưới trên Ω ($u \in PSH(\Omega)$). Hàm $\widetilde{u} \in PSH(\widetilde{\Omega})$ được gọi là dưới*

thác triển của hàm u nếu $\widetilde{u}(z) \leq u(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Nhận xét 1.1.2. Nếu $\widetilde{u}$ là dưới thác triển của u thì tại các điểm $z \in \Omega$ mà $u(z) = -\infty$ thì $\widetilde{u}(z) = -\infty$.

Định nghĩa 1.1.3. *Tập mở* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *gọi là miền siêu lồi nếu tồn tại hàm đa điều hòa dưới* $\varphi : \Omega \longrightarrow (-\infty, 0)$ *sao cho với mọi* $c < 0$ *thì tập* $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$.

Định nghĩa 1.1.4. *Hàm đa điều hòa dưới u được gọi là hàm đa điều hòa dưới cực đại (kí hiệu* $u \in MPSH(\Omega)$ *) nếu mọi tập compact* $K \subset \Omega$ *và với mọi* $v \in PSH(\Omega)$, *nếu* $v \leq u$ *trên* $\Omega \setminus K$ *thì* $v \leq u$ *trên* Ω.

Kí hiệu $MPSH^-(\Omega)$ là tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại âm.

Nhận xét 1.1.5. Như ta đã biết (trong [48]) một hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương $u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ là đa điều hòa dưới cực đại khi và chỉ khi nếu nó thỏa mãn phương trình Monge-Ampère thuần nhất $(dd^c u)^n = 0$. Trong [17], Błocki đã mở rộng kết quả này cho lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Cùng với Định nghĩa 1 đã được trình bày ở trong phần Tổng quan về các lớp hàm đa điều hòa dưới của Cegell lớp $\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega)$. Tiếp theo, chúng tôi đề cập tới định nghĩa các lớp $\mathcal{N}(\Omega), \mathcal{E}_\chi(\Omega)$ và lớp hàm đa điều hòa dưới có giá trị biên trong lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.6. *Giả sử* Ω *là miền siêu lồi trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ *là một dãy cơ bản của* Ω, *nghĩa là* $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ *là dãy các miền giả lồi chặt tăng của* Ω, $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ *và* $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \Omega_j = \Omega$.

Giả sử $\varphi \in PSH^-(\Omega)$. Với mỗi $j \geq 1$, đặt

$$\varphi^j = \sup\{u : u \in PSH^-(\Omega), \quad u \leq \varphi \ \text{ trên } \ \Omega \backslash \overline{\Omega}_j\}.$$

Khi đó như trong [23], hàm $\widetilde{\varphi} = (\lim_{j\to\infty} \varphi^j)^* \in PSH(\Omega)$ và $\widetilde{\varphi} \in MPSH(\Omega)$. Đặt

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \widetilde{\varphi} = 0\}.$$

hoặc tương đương

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{P}SH^-(\Omega) : \varphi^j \uparrow 0\}.$$

Nhận xét 1.1.7. Từ định nghĩa trên và do nguyên lý so sánh trong [23] đúng cho lớp $\mathcal{F}^a(\Omega)$ ta có quan hệ bao hàm $\mathcal{F}(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.8. *Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm giảm và Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó hàm $u \in PSH^-(\Omega)$ thuộc $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ nếu tồn tại dãy $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ giảm tới u trên Ω và*

$$\sup_j \int_\Omega \chi(u_j)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Nhận xét 1.1.9.
a) Nếu ta chọn $\chi(t) = (-t)^p,\ p > 0$ thì lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{E}_p(\Omega)$.
b) Nếu $\chi(t)$ bị chặn và $\chi(0) > 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$ là lớp $\mathcal{F}(\Omega)$.
c) Hệ quả 3.3 trong [42] khẳng định rằng nếu $\chi \not\equiv 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Do đó trong trường hợp này toán tử Monge-Ampère được xác định trên lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega)$.
d) Hệ quả 3.3 trong [42] cũng khẳng định nếu $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$ thì $\mathcal{E}_\chi(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega)$. Hơn nữa, bởi Định lý 2.7 trong [11] ta có

$$\mathcal{E}_\chi(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{N}(\Omega) : \int_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n < +\infty \right\}.$$

Trong luận án này chúng tôi cần dùng khái niệm sau:

Định nghĩa 1.1.10. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở, μ là độ đo Borel dương trong Ω, ta nói:*
i) μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω nếu với mọi tập $A \subset \Omega$, A đa cực ta có $\mu(A) = 0$.
ii) μ gọi là được mang bởi tập đa cực nếu tồn tại tập đa cực $A \subset \Omega$, sao cho $\mu(A) = \mu(\Omega)$. Trong trường hợp này có thể viết $\mu = 1_A\mu$.

Định nghĩa 1.1.11. *Giả sử* $\mathcal{K} \in \{\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{N}(\Omega), \mathcal{E}_\chi(\Omega), \mathcal{E}(\Omega)\}$ *và* $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. *Ta nói hàm đa điều hòa dưới* u *trên* Ω *thuộc* $\mathcal{K}(\Omega, f)$, *nếu tồn tại hàm* $\varphi \in \mathcal{K}$ *sao cho* $\varphi + f \leq u \leq f$ *trên* Ω.
Ký hiệu $\mathcal{K}^a(\Omega, f)$ *là các hàm đa điều hòa dưới* $u \in \mathcal{K}(\Omega, f)$ *sao cho* $\exists \varphi \in \mathcal{K}^a$: $\varphi + f \leq u \leq f$, *ở đó* $\mathcal{K}^a$ *là các hàm* $u \in \mathcal{K}$ *sao cho* $(dd^c u)^n = 0$.

Để chứng minh được Định lý 1.2.1 ta cần một số kết quả sau.

Mệnh đề 1.1.12. *Giả sử* $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *là một hàm liên tục giảm sao cho* $\chi(t) > 0$ *với mọi* $t < 0$ *và* Ω *là miền siêu lồi bị chặn trong* $\mathbb{C}^n$. *Giả sử* μ *là độ đo Radon, triệt tiêu trên các tập đa cực của* Ω *và* $u, v \in \mathcal{E}(\Omega)$ *là các hàm thỏa mãn* $\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu$, $\chi(v)(dd^c v)^n \geq \mu$. *Khi đó*

$$\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n \geq \mu.$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có

$$(dd^c u)^n \geq 1_{\{u=v\}} \frac{\mu}{\chi(u)} = 1_{\{u=v\}} \frac{\mu}{\chi(\max(u, v))}.$$

Tương tự,

$$(dd^c v)^n \geq 1_{\{u=v\}} \frac{\mu}{\chi(v)} = 1_{\{u=v\}} \frac{\mu}{\chi(\max(u, v))}.$$

Từ Mệnh đề 4.3 trong [47] ta có

$$(dd^c(\max(u, v))^n \geq 1_{\{u=v\}} \frac{\mu}{\chi(\max(u, v))},$$

hay

$$\chi(\max(u, v))(dd^c(\max(u, v))^n \geq 1_{\{u=v\}}\mu.$$

Từ bất đẳng thức trên và kết hợp với Định lý 4.1 trong [47] ta thấy

$$\begin{aligned}
&\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n = 1_{\{u>v\}}\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n \\
&+ 1_{\{u=v\}}\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n + 1_{\{u<v\}}\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n \\
&= 1_{\{u>v\}}\chi(u)(dd^c u)^n + 1_{\{u=v\}}\chi(\max(u, v))(dd^c \max(u, v))^n \\
&+ 1_{\{u<v\}}\chi(v)(dd^c v)^n \\
&\geq 1_{\{u>v\}}\mu + 1_{\{u=v\}}\mu + 1_{\{u<v\}}\mu = \mu.
\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề sau là một kết quả khá cơ bản không chỉ dùng để chứng minh Định lý 1.2.1 mà còn dùng được cho chứng minh các kết quả khác.

Mệnh đề 1.1.13. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int\limits_{\{u=-\infty\}\cap\Omega} (dd^c u)^n < +\infty,$$

tồn tại $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $v \geq u$ và

$$(dd^c v)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Chứng minh. Lấy $\varphi \in \mathcal{N}(\Omega)$ sao cho $\varphi + f \leq u \leq f$ trên Ω. Ta có thể giả sử $\varphi \geq u$ trên Ω. Thật vậy, đặt $\psi = \max(\varphi, u)$. Khi đó $\psi \in \mathcal{N}(\Omega), \psi \geq u$ trên Ω. Ta dễ thấy rằng $\psi + f \leq u \leq f$ trên Ω. Thay φ bởi ψ, ta được điều điều giả sử trên. Mặt khác do $(dd^c f)^n$ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và $0 \leq \varphi - u \leq -f$, Bổ đề 4.12 trong [5] cho ta

$$\begin{aligned} 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n &= 1_{\{\varphi=-\infty\}}(dd^c \varphi)^n \\ &\leq (dd^c \varphi)^n. \end{aligned}$$

Hơn nữa, bởi Định lý 4.14 trong [5], tồn tại $w \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho $\varphi + f \leq w \leq f$ trên Ω và

$$(dd^c w)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Ta có $\int\limits_{\Omega}(dd^c w)^n = \int\limits_{\{u=-\infty\}\cap\Omega} (dd^c u)^n < +\infty$ nên Mệnh đề 2.2 trong [34] cho $w \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Đặt

$$\psi_1 = \Big(\sup\{\psi \in PSH^-(\Omega) : \psi + f \leq w \ \text{ trên } \ \Omega\}\Big)^*.$$

Khi đó $\psi_1 \in PSH^-(\Omega)$, $\varphi \leq \psi_1$ và $\psi_1 + f \leq w$ trên Ω. Từ Định lý 2.1 trong [23] ta có:

$$\int_\Omega (dd^c\psi_1)^n \leq \int_\Omega (dd^c w)^n. \tag{1.1}$$

Từ $\psi_1 + f \leq w$ trên Ω thì bởi Bổ đề 4.1 trong [5] ta có:

$$1_{\{w=-\infty\}}(dd^c w)^n \leq 1_{\{\psi_1+f=-\infty\}}(dd^c(\psi_1+f))^n = 1_{\{\psi_1=-\infty\}}(dd^c\psi_1)^n,$$

Đẳng thức thứ 2 ở trên có được do $|\psi_1 + f - \psi_1| = -f$, và bởi Bổ đề 4.12 trong [5]. Nhưng $(dd^c w)^n$ mang bởi một tập đa cực nên ta được

$$\begin{aligned}(dd^c w)^n = 1_{\{w=-\infty\}}(dd^c w)^n &\leq 1_{\{\psi_1+f=-\infty\}}(dd^c(\psi_1+f))^n \\ &= 1_{\{\psi_1=-\infty\}}(dd^c\psi_1)^n \leq (dd^c\psi_1)^n.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Kết hợp (1.1) và (1.2) ta có:

$$(dd^c w)^n = 1_{\{\psi_1=-\infty\}}(dd^c\psi_1)^n.$$

Do đó $1_{\{\psi_1=-\infty\}}(dd^c\psi_1)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n$.
Đặt $v = \max(w, u)$. Ta có $\varphi + f \leq u \leq v \leq f$. Do đó, $v \in \mathcal{N}(\Omega, f), v \geq u$. Ta cần chứng minh rằng $(dd^c v)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n$ và $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ và mệnh đề 1.1.13 được chứng minh. Trước hết, ta chú ý rằng $v \leq \psi_1$ trên Ω. Thật vậy, bởi vì $u + f \leq \varphi + f \leq w$ và $w + f \leq w$ thì $v + f = \max(w + f, u + f) \leq w$. Do đó từ định nghĩa của ψ_1 ta có $v \leq \psi_1$. Mặt khác, từ $v, w \in \mathcal{N}(\Omega, f), v \geq w, \int_\Omega (dd^c w)^n < +\infty$ nên bởi Bổ đề 3.3 trong [5], ta được

$$\int_\Omega (dd^c v)^n \leq \int_\Omega (dd^c w)^n. \tag{1.3}$$

Từ $u \leq v \leq \psi_1$ Bổ đề 4.1 trong [5] kéo theo:

$$1_{\{\psi_1=-\infty\}}(dd^c\psi_1)^n \leq 1_{\{v=-\infty\}}(dd^c v)^n \leq 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Nhưng ta đã chứng minh được rằng $1_{\{\psi_1=-\infty\}}(dd^c\psi_1)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n$ nên

$$1_{\{v=-\infty\}}(dd^c v)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = (dd^c w)^n.$$

Do đó,

$$(dd^c v)^n \geq (dd^c w)^n. \tag{1.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) ta có

$$\int_\Omega (dd^c w)^n \leq \int_\Omega (dd^c v)^n \leq \int_\Omega (dd^c w)^n = \int_{\{u=-\infty\}\cap\Omega} (dd^c u)^n < +\infty.$$

Do vậy,

$$(dd^c v)^n = (dd^c w)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Ngoài ra, bởi Mệnh đề 2.2 trong [34] kéo theo $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Mệnh đề được chứng minh. □

1.2 Dưới thác triển của hàm đa điều hòa trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$

Bây giờ chúng tôi trình bày kết quả chính của chương và chứng minh kết quả chính về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới cho lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$. Đó là:

Định lý 1.2.1. *Giả sử $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $\chi : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục giảm sao cho $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega [\chi(u) - \rho](dd^c u)^n < +\infty,$$

với ρ nào đó thuộc $\mathcal{E}_0(\Omega)$, tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega}, g)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$\chi(\widetilde{u})(dd^c \widetilde{u})^n = 1_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Để chứng minh định lý trên, ta cần vài bổ đề sau:

Bổ đề 1.2.2. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) \cap MPSH(\widetilde{\Omega})$ với $f \geq g$ trên Ω. Giả sử $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

(a) $(dd^c u)^n$ *mang bởi một tập đa cực.*

(b) $\int\limits_{\Omega}(dd^c u)^n < +\infty$.

Khi đó hàm

$$\widetilde{u} := (\sup\{\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g) : \varphi \leq u \text{ trên } \Omega\})^*$$

thuộc $\mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ *và* $(dd^c\widetilde{u})^n = 1_{\Omega}(dd^c u)^n$ *trên* $\widetilde{\Omega}$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử $(dd^c u)^n$ mang bởi tập đa cực $\{u = -\infty\}$. Do [34] tồn tại $v \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$ sao cho $v \leq u$ trên Ω và

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}}(dd^c v)^n \leq \int\limits_{\Omega}(dd^c u)^n.$$

Từ $v \leq \widetilde{u} \leq g$ trong $\widetilde{\Omega}$ kéo theo $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$. Bổ đề 3.3 trong [5] cho ta

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}}(dd^c\widetilde{u})^n \leq \int\limits_{\widetilde{\Omega}}(dd^c v)^n \leq \int\limits_{\Omega}(dd^c u)^n.$$

Nhưng $\widetilde{u} \leq u$ trong Ω nên bởi Bổ đề 4.1 trong [5] ta có

$$1_{\{\widetilde{u}=-\infty\}}(dd^c\widetilde{u})^n \geq 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n,$$

trên Ω. Tuy nhiên, do $(dd^c u)^n$ mang bởi tập đa cực $\{u = -\infty\}$ nên

$$(dd^c\widetilde{u})^n \geq 1_{\Omega}(dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\widetilde{\Omega}}(dd^c\widetilde{u})^n \leq \int\limits_{\Omega}(dd^c u)^n &= \int\limits_{\Omega\cap\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n \\ &\leq \int\limits_{\Omega\cap\{\widetilde{u}=-\infty\}}(dd^c\widetilde{u})^n \leq \int\limits_{\widetilde{\Omega}}(dd^c\widetilde{u})^n,\end{aligned}$$

Do đó $\int\limits_{\widetilde{\Omega}}(dd^c\widetilde{u})^n = \int\limits_{\Omega}(dd^c u)^n$ suy ra $(dd^c\widetilde{u})^n = 1_{\Omega}(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề sau được dùng để chứng minh kết quả chính,

Bổ đề 1.2.3. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và μ là độ đo Radon dương, triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω với $\mu(\Omega) < +\infty$. Cho $\chi : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục giảm bị chặn thỏa mãn $\chi(t) > 0$ với mọi $t < 0$ và $\chi(-\infty) = 1$. Giả sử $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ thỏa mãn $(dd^c v)^n$ mang bởi một tập đa cực và*

$$\int_\Omega (dd^c v)^n < +\infty.$$

Khi đó hàm u xác định bởi

$$u := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v \text{ và } \chi(\varphi)(dd^c\varphi)^n \geq \mu\})^*$$

thuộc lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ và

$$\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu + (dd^c v)^n.$$

Hơn nữa, nếu $supp(dd^c v)^n \Subset \Omega$ và $\int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$ với ρ nào đó thuộc $\mathcal{E}_0(\Omega)$ thì

$$\chi(u)(dd^c u)^n = \mu + (dd^c v)^n.$$

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Thật vậy, từ μ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực của Ω và $\mu(\Omega) < +\infty$ nên theo Định lý 4.10 trong [42] tồn tại $\Phi_0 \in \mathcal{N}(\Omega)$ sao cho

$$\chi(\Phi_0)(dd^c\Phi_0)^n = \mu.$$

Đặt $\Phi_1 := \Phi_0 + v$. Khi đó $\Phi_1 \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ và

$$\chi(\Phi_1)(dd^c\Phi_1)^n \geq \chi(\Phi_0)(dd^c\Phi_0)^n = \mu.$$

Vậy $u \geq \Phi_1$ nên $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Tiếp theo, ta chứng minh $\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu$. Thật vậy, bởi Bổ đề Choquet (xem [14]) và Mệnh đề 1.1.12, ta có thể coi $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$, φ_j tăng và hội tụ hầu khắp nơi trên Ω tới u, $\varphi_j \geq \Phi_1$, và

$$\chi(\varphi_j)(dd^c\varphi_j)^n \geq \mu.$$

Cố định $k \geq 1$. Với $j \geq k$ ta có $\chi(\varphi_j) \leq \chi(\varphi_k)$. Vậy

$$\chi(\varphi_k)(dd^c\varphi_j)^n \geq \chi(\varphi_j)(dd^c\varphi_j)^n \geq \mu.$$

Do đó

$$(dd^c\varphi_j)^n \geq \frac{1}{\chi(\varphi_k)}\mu.$$

Cho $j \to +\infty$, bởi [24] ta có

$$(dd^c u)^n \geq \frac{1}{\chi(\varphi_k)}\mu.$$

Do $\varphi_k \nearrow u$ khi $k \nearrow \infty$ ngoài tập đa cực của Ω, μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω nên khi cho $k \to +\infty$ ta được,

$$(dd^c u)^n \geq \frac{1}{\chi(u)}\mu.$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu + (dd^c v)^n$. Thật vậy, từ μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và $\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu$ nên

$$1_{\{u\neq-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n \geq 1_{\{u\neq-\infty\}}\mu + 1_{\{u=-\infty\}}\mu = \mu.$$

Nhưng từ $u \leq v$, và $\chi(-\infty) = 1$, Bổ đề 4.1 trong [5], cho ta:

$$1_{\{u=-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n \geq 1_{\{v=-\infty\}}(dd^c v)^n.$$

Do đó,

$$\chi(u)(dd^c u)^n \geq \mu + (dd^c v)^n.$$

Bây giờ, giả sử $\operatorname{supp}(dd^c v)^n \Subset U \Subset \Omega$ và $\int\limits_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$. Theo Định lý 2.4 trong [5], ta có thể giả sử $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Bởi Mệnh đề 2.5 trong [5] ta chọn dãy $\{v_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ sao cho $\operatorname{supp}(dd^c v_j)^n \Subset U \Subset \Omega$, $v_j \searrow v$ khi $j \nearrow \infty$. Từ $0 \leq \chi \leq 1$ và $v \leq v_j$ theo Bổ đề 3.3 trong [5], ta có

$$\int\limits_\Omega \chi(v_j)(dd^c v_j)^n \leq \int\limits_\Omega (dd^c v_j)^n \leq \int\limits_\Omega (dd^c v)^n < +\infty.$$

Lại do $\mu(\Omega) < +\infty$ nên theo Định lý 4.10 trong [42] tồn tại hàm $w_j \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho

$$\chi(w_j)(dd^c w_j)^n = \mu + \chi(v_j)(dd^c v_j)^n. \tag{1.5}$$

Điều này kéo theo $\chi(w_j)(dd^c w_j)^n \geq \chi(v_j)(dd^c v_j)^n$. Do đó bởi Định lý 4.8 trong [42] ta được $w_j \leq v_j$ trên Ω. Đặt

$$u_j := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v_j \text{ và } \chi(\varphi)(dd^c\varphi)^n \geq \mu\})^*.$$

Ta có $u_j \geq w_j$ trên Ω. Từ $u_{j+1} \leq u_j$ bởi vậy $u_{j+k} \leq u_j$, $\forall k \geq 0$. Do đó,

$$w_j \leq \psi_j := \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} w_{j+k}\right)^* \leq u_j.$$

Suy ra $\psi := \lim\limits_{j\to+\infty} \psi_j \leq u := \lim\limits_{j\to+\infty} u_j$. Ngoài ra, từ

$$(dd^c(\Phi_0 + v_j))^n \geq (dd^c\Phi_0)^n + (dd^c v_j)^n,$$

và $\chi(\Phi_0 + v_j) \geq \chi(\Phi_0), \chi(\Phi_0 + v_j) \geq \chi(v_j)$, và do (1.5) ta được

$$\begin{aligned}
\chi(\Phi_0 + v_j)(dd^c(\Phi_0 + v_j))^n &\geq \chi(\Phi_0 + v_j)\Big((dd^c\Phi_0)^n + (dd^c v_j)^n\Big) \\
&= \chi(\Phi_0 + v_j)(dd^c\Phi_0)^n + \chi(\Phi_0 + v_j)(dd^c v_j)^n \\
&\geq \chi(\Phi_0)(dd^c\Phi_0)^n + \chi(v_j)(dd^c v_j)^n \\
&= \mu + \chi(v_j)(dd^c v_j)^n = \chi(w_j)(dd^c w_j)^n
\end{aligned}$$

Lại theo Định lý 4.8 trong [42] suy ra $w_j \geq \Phi_0 + v_j \geq \Phi_0 + v$. Vậy $\psi, \psi_j \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ và $\psi_j \searrow \psi$ khi $j \longrightarrow \infty$. Do đó, bởi Bổ đề 3.3 và Hệ quả 3.4 trong

[5] ta có

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n &\le \int_\Omega (-\rho)(dd^c \psi)^n = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega (-\rho)(dd^c\psi_j)^n \\ &\le \limsup_{j\to\infty}\int_\Omega (-\rho)(dd^c w_j)^n \\ &\le \limsup_{j\to\infty}\int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(\psi_j)}[\mu + (dd^c v_j)^n] \\ &\le \limsup_{j\to\infty}\int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(\psi_j)}\mu + \limsup_{j\to\infty}\int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(\psi_j)}(dd^c v_j)^n \\ &\le \int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(\psi)}\mu + \limsup_{j\to\infty}\int_{\overline{U}} \frac{-\rho}{\chi(\psi_j)}(dd^c v_j)^n,\end{aligned} \tag{1.6}$$

Trong đó đẳng thức thứ nhất trong (1.6) có được do định lý về sự hội tụ đều, đánh giá thứ hai bởi vì $\operatorname{supp}(dd^c v_j)^n \Subset U \Subset \Omega$. Từ $v_j \searrow v \in \mathcal{E}(\Omega)$ nên theo Hệ quả 3.3 trong [24] ta thấy $-\rho(dd^c v_j)^n$ hội tụ yếu tới $-\rho(dd^c v)^n$. Nhưng $\frac{1}{\chi(\psi_j)}$ liên tục trên và giảm tới $\frac{1}{\chi(\psi)}$. Do đó ta có đánh giá biểu thức thứ hai trong (1.6) như sau

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty}\int_{\overline{U}} \frac{-\rho}{\chi(\psi_j)}(dd^c v_j)^n &\le \int_{\overline{U}} \frac{-\rho}{\chi(\psi)}(dd^c v)^n \\ &\le \int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(\psi)}(dd^c v)^n \le \int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(u)}(dd^c v)^n.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Kết hợp (1.6) và (1.7) Ta có

$$\int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n \le \int_\Omega \frac{-\rho}{\chi(u)}[\mu + (dd^c v)^n].$$

Mặt khác, từ $\int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty$ và

$$-\rho(dd^c u)^n \ge \frac{-\rho}{\chi(u)}[\mu + (dd^c v)^n]$$

nên

$$(-\rho)(dd^c u)^n = \frac{-\rho}{\chi(u)}[\mu + (dd^c v)^n].$$

Suy ra $\chi(u)(dd^c u)^n = \mu + (dd^c v)^n$ và đó là điều phải chứng minh. □

Bây giờ ta chứng minh Định lý 1.2.1.

Chứng minh Định lý 1.2.1.

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $\chi(-\infty) = +\infty$. Từ $u \in \mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ và $\chi(t) > 0\ \forall t < 0$, nên theo Hệ quả 3.3 trong [42] thì $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Mặt khác do $\int\limits_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n < +\infty$ và $\chi(-\infty) = +\infty$ chúng ta có $(dd^c u)^n$ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω. Do đó $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$. Từ $1_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n$ là độ đo Radon dương và triệt tiêu trên các tập đa cực của $\widetilde{\Omega}$ và $\int\limits_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n < +\infty$ nên theo Định lý 4.10 trong [42] thì tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega}, g)$ sao cho

$$\chi(\widetilde{u})(dd^c \widetilde{u})^n = 1_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n,$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Từ $\widetilde{u} \le g$ trên $\widetilde{\Omega}$ suy ra $\widetilde{u} \le f$ trên Ω. Đặt $w = \max(\widetilde{u}, u)$ trên Ω thì $w \in \mathcal{E}(\Omega, f)$. Theo Mệnh đề 1.1.12 thì $\chi(w)(dd^c w)^n \ge \chi(u)(dd^c u)^n$ trên Ω. Do đó, theo Định lý 4.8 trong [42] thì $w \le u$ trên Ω. Suy ra $\widetilde{u} \le u$ trên Ω. Vậy $\widetilde{u}$ là dưới thác triển cần tìm.

Trường hợp 2. $\chi(-\infty) < +\infty$. Không mất tính tổng quát giả sử $\chi(-\infty) = 1$. Theo định nghĩa lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{E}_\chi(\Omega)$ sao cho

$$\varphi + f \le u \le f,$$

trên Ω. Theo Hệ quả 3.3 trong [42] thì $\varphi \in \mathcal{N}(\Omega)$ nên $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Mặt khác từ

$$\int\limits_{\Omega \cap \{u=-\infty\}} (dd^c u)^n \le \int\limits_\Omega \chi(u)(dd^c u)^n < +\infty,$$

theo Mệnh đề 1.1.13 thì tồn tại $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $v \ge u$ và

$$(dd^c v)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Đặt

$$w := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v \text{ và } \chi(\varphi)(dd^c\varphi)^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n\})^*.$$

ta có $u \leq w$. Bởi Bổ đề 1.2.3 ta có $w \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ và

$$\begin{aligned}\chi(w)(dd^c w)^n &\geq 1_{\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n + (dd^c v)^n \\ &= \chi(u)(dd^c u)^n \geq \chi(w)(dd^c u)^n.\end{aligned}$$

Từ đó $(dd^c w)^n \geq (dd^c u)^n$ trên Ω. Dùng Hệ quả 3.3 trong [5], ta có

$$0 \leq \int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n \leq \int_\Omega (-\rho)(dd^c w)^n \leq \int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n < +\infty.$$

Từ đó $(dd^c w)^n = (dd^c u)^n$. Theo Định lý 3.6 trong [5], ta được $w = u$.
Đặt

$$\widetilde{v} := \Big(\sup\{\varphi \in \mathcal{N}(\widetilde{\Omega}, g) : \varphi \leq v \text{ trên } \Omega\}\Big)^*.$$

Theo chứng minh của Bổ đề 1.2.2 ta có $\widetilde{v} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, g)$, $\widetilde{v} \leq v$ trên Ω và $(dd^c\widetilde{v})^n = 1_\Omega(dd^c v)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$. Tiếp theo, đặt

$$\widetilde{u} := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\widetilde{\Omega}) : \varphi \leq \widetilde{v} \text{ and } \chi(\varphi)(dd^c\varphi)^n \geq 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n\})^*.$$

Do Bổ đề 1.2.3 ta có $\widetilde{u} \in \mathcal{N}(\widetilde{\Omega}, g)$.
Ta chứng minh $\widetilde{u} \in MPSH(\widetilde{\Omega}\backslash\overline{\Omega})$. Thật vậy, lấy $\varphi \in PSH(\widetilde{\Omega}\backslash\overline{\Omega})$ và $\omega \Subset \widetilde{\Omega}\backslash\overline{\Omega}$ sao cho $\varphi \leq \widetilde{u}$ trên $\partial\omega$. Đặt

$$\ell = \begin{cases} \max(\varphi, \widetilde{u}) & \text{trên } \omega \\ \widetilde{u} & \text{trên } \widetilde{\Omega} \setminus \omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Theo định lý dán hai hàm đa điều hòa dưới trong [48], ta có $\ell \in PSH(\widetilde{\Omega})$ và $\ell \leq g$ trên $\partial\omega$. Bởi vì $g \in MPSH(\widetilde{\Omega})$ nên $\ell \leq g$ trên $\widetilde{\Omega}$. Vậy $\widetilde{u} \leq \ell$ trên $\widetilde{\Omega}$, kéo theo, $\ell \in \mathcal{N}(\widetilde{\Omega}, g)$. Mặt khác, $\ell = \widetilde{u} \leq \widetilde{v} \leq v$ trên Ω theo định nghĩa của $\widetilde{v}$ thì $\ell \leq \widetilde{v}$ trên $\widetilde{\Omega}$. Lại theo Bổ đề 1.2.3 ta có

$$\chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n \geq 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n.$$

Do đó,

$$1_\Omega \chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n \geq 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n.$$

Mặt khác ta có thể viết

$$\chi(\ell)(dd^c\ell)^n = 1_\Omega\chi(\ell)(dd^c\ell)^n + 1_{\widetilde{\Omega}\setminus\Omega}\chi(\ell)(dd^c\ell)^n \geq 1_\Omega\chi(\ell)(dd^c\ell)^n$$

và trên Ω ta có $\ell = \widetilde{u}$. Vậy

$$\chi(\ell)(dd^c\ell)^n \geq 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n.$$

Theo định nghĩa của $\widetilde{u}$ ta được $\ell \leq \widetilde{u}$. Do đó $\varphi \leq \widetilde{u}$ trên $\widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}$. Vậy $\widetilde{u} \in MPSH(\widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega})$.

Từ $\widetilde{u} \in MPSH(\widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega})$ nên $(dd^c\widetilde{u})^n = 0$ trên $\widetilde{\Omega}\setminus\overline{\Omega}$. Bởi vì $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ nên

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n = \int\limits_{\overline{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n < +\infty.$$

Hơn nữa, từ $\mathrm{supp}(dd^c\widetilde{v})^n \subset \Omega \Subset \widetilde{\Omega}$ bởi Bổ đề 1.2.3 ta có

$$\begin{aligned}\chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n &= 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}\chi(u)(dd^c u)^n + (dd^c\widetilde{v})^n\\ &= 1_\Omega\chi(u)(dd^c u)^n.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của $\widetilde{u}$ và w ta có $\widetilde{u} \leq w$ trên Ω. Vậy $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω.

Cuối cùng ta chứng minh $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega}, g)$. Từ $\widetilde{u} \in \mathcal{N}(\widetilde{\Omega}, g)$ và

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n < +\infty,$$

nên theo Định lý 2.1 trong [23] thì tồn tại $\psi \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega})$ sao cho $\psi + g \leq \widetilde{u} \leq g$ on $\widetilde{\Omega}$ và

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\psi)^n \leq \int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n.$$

Bởi vì $0 \leq \chi \leq 1$ nên

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \chi(\psi)(dd^c\psi)^n \leq \int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\psi)^n \leq \int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c\widetilde{u})^n < +\infty.$$

Định lý 2.7 trong [11] cho ta $\psi \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega})$. Do đó $\widetilde{u} \in \mathcal{E}_\chi(\widetilde{\Omega}, g)$ và định lý được chứng minh. $\square$

Kết luận chương 1: Từ chứng minh được Định lí 1.2.1 đã cho ta quả chính của chương 1 là,

• Chỉ ra được sự tồn tại dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng trên miền siêu lồi bị trặn trong $\mathbb{C}^n$.

• Chứng tỏ được rằng trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$, với Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ thì độ đo Monge-Apère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là không thay đổi.

Chương 2

Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng

Như đã trình bày ở Phần mở đầu, trong chương 2 chúng tôi sẽ trình bày vấn đề dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn. Phần ứng dụng chúng tôi giải quyết bài toán xấp xỉ của các hàm đa điều hòa với giá trị biên trong miền siêu lồi không bị chặn $\mathbb{C}^n$.

Chương 2 gồm ba phần. Trong phần đầu, chúng tôi trình bày một số khái niệm và mệnh đề cần thiết cho các chứng minh ở phần tiếp theo. Phần hai là các bổ đề và chứng minh định lý chính. Phần ba là phần ứng dụng, ở đây chúng tôi áp dụng kết quả của dưới thác triển trên miền siêu lồi không bị chặn vào bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn.

Chương 2 được viết dựa trên bài báo [2] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án).

2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Định nghĩa 2.1.1. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Hàm đa điều hòa dưới âm $u \in PSH^-(\Omega)$ gọi là hàm đa điều hòa dưới chặt nếu với mọi $U \Subset \Omega$, tồn tại $\lambda > 0$ sao cho hàm $u(z) - \lambda|z|^2 \in PSH(U)$. Nghĩa là $dd^c u \geq \lambda\beta$ trên U, trong đó $\beta = \frac{i}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ là dạng Kähler chính tắc trong $\mathbb{C}^n$.*

Kí hiệu $PSH^s(\Omega)$ là tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới chặt trong Ω.

Trong [44] đã đưa ra Ví dụ 3.2 chứng tỏ rằng tồn tại miền siêu lồi không bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$, cụ thể [44] đưa ra ví dụ sau đây,

Ví dụ 2.1.2. Giả sử $n \geq 1$ là số nguyên dương. Đặt $\rho(z) := 12|\Re z_1|^2 - \frac{1}{(|z_1|^2+1)^2} + \sum_{j=2}^{n} |z_j|^2$, trong đó $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_j = x_j + iy_j, j = 1, \ldots, n$. Giả sử Ω là thành phần liên thông của tập mở

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}.$$

Khi đó Ω chứa đường thẳng $(iy_1, 0)$, $y_1 \in \mathbb{R}$, nên Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và ρ là hàm đa điều hòa dưới chặt bị chặn trên Ω (xem Ví dụ 3.2 trong [44]).

Do đó trong suốt chương này ta luôn đặt điều kiện rằng $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$, bởi vì với điều kiện đó trong trường hợp Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, Mệnh đề 4.2 trong [44] đã cho ta một kết quả quan trọng là: Nếu $u \in \mathcal{E}(\Omega, f)$ thì $u \in \mathcal{E}(D)$ với mọi miền siêu lồi bị chặn $D \Subset \Omega$ và do đó trong trường hợp này toán tử Monge-Ampère phức $(dd^c.)^n$ được xác định trong lớp $\mathcal{E}(\Omega, f)$.

Trong chương này ta phải sử dụng các lớp $\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}(\Omega), \mathcal{E}(\Omega)$ và $\mathcal{F}(\Omega, f)$ trong trường hợp Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$(xem Định nghĩa 2 ở phần Tổng quan) các lớp này đã được nghiên cứu và giới thiệu trong [44]. Chúng ta tiếp tục sử dụng lớp các hàm đa điều hòa dưới cực đại, hàm đa điều hòa dưới cực đại âm trên Ω đã được nêu ra trong Định nghĩa 1.1.4 ở chương

1. Bây giờ chúng ta cho một kết quả liên quan đến lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ khi Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Mệnh đề 2.1.3. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và giả sử $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Giả sử $u, v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Khi đó ta có kết quả sau.*

(a) Nếu $u \leq v$ thì

$$\int_\Omega (dd^c u)^n \geq \int_\Omega (dd^c v)^n.$$

(b) Nếu $u \leq v$, $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ và $\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty$ thì $u = v$.

Chứng minh. Lấy $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\psi + f \leq u \leq f$ trên Ω. Cho $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy các miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Đặt

$$\psi^j := (\sup\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \varphi \leq \psi \text{ trên } \Omega \backslash \Omega_j\})^*.$$

Từ $\psi \in \mathcal{F}(\Omega), \psi \leq \psi^j$ thì theo Mệnh đề 3.3 trong [44] ta có $\psi^j \in \mathcal{F}(\Omega)$ và dãy $\{\psi^j\}_{j=1}^\infty$ là dãy tăng . Ta thấy $\psi^j \nearrow 0$ hầu khắp nơi(h.k.n) trong Ω khi $j \nearrow \infty$. Thật vậy, đặt $w = (\lim\limits_{j\to\infty} \psi^j)^*$ thì $\psi^j \leq w$ trên Ω và $w \in \mathcal{F}(\Omega)$. Mặt khác, ta thấy $\psi^j \in MPSH(\Omega_j)$. Áp dụng Mệnh đề 4.2 trong [44] cho $f = 0$ và sử dụng kết quả trong [17] ta được $(dd^c\psi^j)^n(\Omega_j) = 0$. Theo đó ta có $(dd^c\psi^j)^n(\Omega_k) = 0$ với $k \leq j$. Nhưng theo Mệnh đề 4.2 trong [44], $\psi^j, w \in \mathcal{E}(\Omega_k)$ với mọi $j > k$ và $\psi^j \nearrow w$ trong C_n - dung lượng trên Ω_k, theo kết quả trong [24] ta có $(dd^c\psi^j)^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c w)^n$ trên Ω_k.

Vậy $(dd^c w)^n(\Omega_k) \leq \liminf (dd^c\psi^j)^n(\Omega_k) = 0$ với mọi k. Do đó $(dd^c w)^n(\Omega_k) = 0$ với mọi k. Cho $k \to \infty$ với chú ý $\Omega_k \nearrow \Omega$ ta được $(dd^c w)^n(\Omega) = 0$. Lấy $\varrho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$, $\varrho < 0$ trên Ω. Theo Mệnh đề 3.3 trong [44] ta được $\max(\varrho, w) \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Bởi Mệnh đề 4.5 trong [44] ta được

$$0 \leq \int_\Omega (dd^c \max(\rho, w))^n \leq \int_\Omega (dd^c w)^n = 0.$$

Do vậy, $(dd^c \max(\rho, w))^n = 0$ trong Ω và theo Mệnh đề 3.3 trong [44] ta có $\max(\rho, w) = 0$ trên Ω. Vậy, $w = 0$ trên Ω .

(a) Từ $u = \max(u, v + \psi^j)$ trên $\Omega \backslash \Omega_j$, lấy $\Omega_j \subset G \subset \Omega$ thì ta có

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (dd^c u)^n &= \int_G (dd^c u)^n + \int_{\Omega \backslash G} (dd^c u)^n \\
&= \int_G (dd^c u)^n + \int_{\Omega \backslash G} (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n \\
&= \int_G (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n + \int_{\Omega \backslash G} (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n \\
&= \int_\Omega (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n.
\end{aligned}$$

Mặt khác do $\max(u, v + \psi^j) \nearrow v$ bởi vậy theo [24] ta được $(dd^c \max(u, v + \psi^j))^n \longrightarrow (dd^c v)^n$ yếu. Do đó,

$$\int_\Omega (dd^c u)^n = \liminf_{j \to \infty} \int_\Omega (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n \geq \int_\Omega (dd^c v)^n.$$

(b) Trước hết ta chứng minh rằng:

$$(dd^c u)^n = (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n \text{ trên } \Omega.$$

Thật vậy, lấy $D \Subset \Omega$ là miền siêu lồi bị chặn. Do Mệnh đề 4.2 trong [44] ta có $u, v \in \mathcal{E}(D)$. Mặt khác, từ $u \leq \max(u, v + \psi^j) \leq v$ trong D nên $\{v = -\infty\} \cap D \subset \{\max(u, v + \psi^j) = -\infty\} \cap D \subset \{u = -\infty\} \cap D$. Do đó theo Bổ đề 4.1 trong [5], ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
1_{\{\{v=-\infty\}\cap D\}} (dd^c v)^n &\leq 1_{\{\{\max(u,v+\psi^j)=-\infty\}\cap D\}} (dd^c v)^n \\
&\leq 1_{\{\{\max(u,v+\psi^j)=-\infty\}\cap D\}} (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n \\
&\leq 1_{\{\{u=-\infty\}\cap D\}} (dd^c \max(u, v + \psi^j)^n \\
&\leq 1_{\{\{u=-\infty\}\cap D\}} (dd^c u)^n \\
&\leq 1_{\{\{u=-\infty\}\cap D\}} (dd^c v)^n = 1_{\{\{v=-\infty\}\cap D\}} (dd^c v)^n.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$1_{\{\{\max(u,v+\psi^j)=-\infty\}\cap D\}} (dd^c \max(u, v + \psi^j))^n = 1_{\{\{u=-\infty\}\cap D\}} (dd^c u)^n. \quad (2.1)$$

Tuy nhiên, Bởi Mệnh đề 4.3 trong [47] chúng ta có

$1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}(dd^c\max(u,v+\psi^j))^n \geq 1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}1_{\{u\geq v+\psi^j\}}(dd^cu)^n$
$+ 1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}1_{\{u<v+\psi^j\}}(dd^c(v+\psi^j))^n.$

Nhưng $(dd^c(v+\psi^j))^n \geq (dd^cv)^n+(dd^c\psi^j)^n$ và theo giả thiết $(dd^cv)^n \geq (dd^cu)^n$ nên ta đánh giá vế phải của bất đẳng thức trên như sau:

$$\begin{aligned}
&1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}1_{\{u\geq v+\psi^j\}}(dd^cu)^n\\
&+ 1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}1_{\{u<v+\psi^j\}}((dd^cu)^n + (dd^c\psi^j)^n)\\
&\geq 1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}(dd^cu)^n \geq 1_{\{u>-\infty\}\cap D}(dd^cu)^n.
\end{aligned}$$

Từ đó ta được:

$$1_{\{\max(u,v+\psi^j)>-\infty\}\cap D}(dd^c\max(u,v+\psi^j))^n \geq 1_{\{u>-\infty\}\cap D}(dd^cu)^n. \qquad (2.2)$$

Kết hợp (2.1) và (2.2) ta có:

$$1_D(dd^c\max(u,v+\psi^j))^n \geq 1_D(dd^cu)^n.$$

Do $D \Subset \Omega$ là miền siêu lồi bị chặn bất kỳ nên

$$(dd^c\max(u,v+\psi^j))^n \geq (dd^cu)^n,$$

trên Ω. Mặt khác, do $u, \max(u,v+\psi^j) \in \mathcal{F}(\Omega,f)$ và $u \leq \max(u,v+\psi^j)$ theo phần (a) ta có:

$$\int_\Omega (dd^c\max(u,v+\psi^j))^n \leq \int_\Omega (dd^cu)^n < \infty.$$

Vậy ta được

$$(dd^c\max(u,v+\psi^j))^n = (dd^cu)^n \text{ trên } \Omega$$

Lấy $\varphi \in PSH^s(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ sao cho $-1 \leq \varphi < 0$. Từ $\{u \neq \max(u,v+\psi^j)\} \subset \Omega_j \Subset \Omega$ và theo mệnh đề 3.1 trong [47] ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_\Omega [\max(u,v+\psi^j)-u]^n(dd^c\varphi)^n = \frac{1}{n!}\int_{\Omega_j}[(\max(u,v+\psi^j)-u]^n(dd^c\varphi)^n\\
&\leq \int_{\Omega_j}\varphi[(dd^c\max(u,v+\psi^j))^n - (dd^cu)^n] = 0.
\end{aligned}$$

suy ra $u = \max(u, v + \psi^j)$ trong Ω. Cho $j \nearrow \infty$ ta có $u = \max(u, v) = v$ trong Ω và được điều phải chứng minh. $\square$

2.2 Dưới thác triển trên miền siêu lồi không bị chặn

Định lý chính của chương này là mở rộng kết quả ở trong [41] cho trường hợp Ω là siêu lồi không bị chặn.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\widetilde{\Omega}) \cap L^\infty(\widetilde{\Omega}) \neq \varnothing$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\widetilde{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\widetilde{\Omega})$ và mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại $\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, f)$ sao cho $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω và

$$(dd^c \widetilde{u})^n = 1_\Omega (dd^c u)^n \text{ trên } \widetilde{\Omega}.$$

Ta cần có một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.2. *Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$. Giả sử $w \in \mathcal{E}(\Omega)$ và μ là độ đo Borel dương trong Ω sao cho $w \leq f$ trong Ω, $\mu \leq (dd^c w)^n$ trong Ω và $\int_\Omega (dd^c w)^n < \infty$. Khi đó tồn tại $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = \mu$ trong Ω.*

Chứng minh. Để chứng minh bổ đề trên ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. μ mang bởi một tập đa cực của Ω. Theo Định lý 2.1 trong [23] tồn tại $g \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho

$$v + g \leq w \leq g \text{ trên } \Omega,$$

và

$$\int_\Omega (dd^c v)^n \leq \int_\Omega (dd^c w)^n.$$

Đặt $\psi = \max(v, w)$. Khi đó $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$, $\psi \geq w$ trên Ω. Từ $\psi \geq v$ trên Ω nên ta có:

$$\int_\Omega (dd^c\psi)^n \leq \int_\Omega (dd^c v)^n \leq \int_\Omega (dd^c w)^n.$$

Mặt khác $\psi + g \leq w \leq g$ trên Ω, vì $\psi + g = \max(v, w) + g = \max(v+g, w+g) \leq w$. Do đó, $0 \leq \psi - w \leq -g$ nên Hệ quả 4.12 trong [5] cho ta:

$$1_{\{\psi=-\infty\}}(dd^c\psi)^n = 1_{\{w=-\infty\}}(dd^c w)^n \text{ trong } \Omega.$$

Do μ mang bởi tập đa cực của Ω nên tồn tại $A \subset \Omega$ sao cho $\mu(\Omega) = \mu(A)$.

$$\begin{aligned}\mu = 1_A\mu \leq 1_A(dd^c w)^n &= 1_{\{w=-\infty\}\cap A}(dd^c w)^n + 1_{\{w>-\infty\}\cap A}(dd^c w)^n \\ &\leq 1_{w=-\infty}(dd^c w)^n,\end{aligned}$$

trong Ω(vì $1_{\{w>-\infty\}\cap A}(dd^c w)^n = 0$). Do đó,

$$\mu \leq (dd^c\psi)^n,$$

trong Ω.

Theo Định lý 4.14 trong [5] và Mệnh đề 2.2 trong [34] tồn tại $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\varphi \geq \psi$ và $(dd^c\varphi)^n = \mu$. Đặt

$$u = \Big(\sup\{v \in PSH^-(\Omega) : v \leq \min(f, \varphi) \text{ trong } \Omega\}\Big)^*.$$

Khi đó $u \geq w$ trong Ω.

Mà $\varphi + f \leq f$, $\varphi + f \leq \varphi$ nên $\varphi + f \leq min(\varphi, f)$. Do đó $\varphi + f \leq u \leq f$ nên $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$.

Mặt khác, từ $\varphi + f \leq u \leq \varphi$ nên $0 \leq \varphi - u \leq -f$ trên Ω. Lại do Bổ đề 4.12 trong [5] ta có:

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{\varphi=-\infty\}}(dd^c\varphi)^n, \tag{2.3}$$

trong Ω. Mặt khác bởi vì μ mang bởi một tập đa cực trong Ω và $\mu = (dd^c\varphi)^n, \varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì theo Định lý 5.11 trong [21] ta có:

$$\mu = (dd^c\varphi)^n = 1_{\{\varphi=-\infty\}}(dd^c\varphi)^n, \tag{2.4}$$

trong Ω. Suy ra $1_{\{\varphi>-\infty\}}(dd^c\varphi)^n = 0$ trong Ω.
Ngoài ra, bởi Mệnh đề 2.2 trong [44] ta có;

$$1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \leq (dd^c\varphi)^n,$$

trong Ω. Từ $u \leq \varphi$ trong Ω ta có:

$$\begin{aligned} 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n &= 1_{\{u>-\infty\}\cap\{\varphi>-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{\varphi>-\infty\}}1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \\ &\leq 1_{\{\varphi>-\infty\}}(dd^c\varphi)^n. \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$0 \leq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \leq 1_{\{\varphi>-\infty\}}(dd^c\varphi)^n = 0,$$

trong Ω. Vậy

$$1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n = 0,$$

trong Ω. Bây giờ, từ (2.3) và (2.4) ta có

$$\mu = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = (dd^c u)^n,$$

trong Ω. Và được điều cần chứng minh.

Trường hợp 2. μ là độ đo Borel bất kỳ. Theo trường hợp 1 tồn tại $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho $v \geq w$ và

$$(dd^c v)^n = 1_{\{w=-\infty\}}\mu, \tag{2.5}$$

trong Ω. Mặt khác, theo giả thiết

$$1_{\{w>-\infty\}}\mu \leq 1_{\{w>-\infty\}}(dd^c w)^n,$$

và do đó độ đo $1_{\{w>-\infty\}}\mu$ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω. Do Bổ đề 5.14 trong [21] tồn tại $h \in \mathcal{F}(\Omega)$, $(dd^c h)^n = 1_{\{w>-\infty\}}\mu$. Đặt $g = h + v$ thì $g \in \mathcal{F}(\Omega, f)$, $g \leq v$ trên Ω và $(dd^c g)^n \geq (dd^c h)^n = 1_{\{w>-\infty\}}\mu$.
Tiếp theo, đặt $\widetilde{g} = \max(g, w)$. Vì $g \leq \widetilde{g} = \max(g, w) \leq f$, $g \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ nên $\widetilde{g} \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Lại do $g \leq v, w \leq v$, nên $\widetilde{g} \leq v$, $\widetilde{g} \geq w$ trên Ω, nên theo Mệnh đề 4.3 trong [47] ta có $(dd^c\widetilde{g})^n \geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu$. Đặt

$$u = \Big(\sup\{\varphi \in \mathcal{F}(\Omega, f) : \varphi \leq v \text{ và } (dd^c\varphi)^n \geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu \text{ trong } \Omega\}\Big)^*.$$

Ta có $u \geq \widetilde{g} \geq w$ trên Ω. Do đó, $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$.
Chúng ta sẽ chứng minh rằng $(dd^c u)^n = \mu$. Trước hết ta chứng minh: $(dd^c u)^n \geq \mu$ trên Ω.
Thật vậy, theo bổ đề Choquet trong [14] tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $\varphi_j \leq v$ trên Ω, $(dd^c\varphi_j)^n \geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu$ và

$$u = \Big(\sup_{j\in\mathbb{N}^*} \varphi_j\Big)^*.$$

Bởi Mệnh đề 1.1.12 ta có thể thay φ_j bằng $\max\{w, \varphi_1, \ldots, \varphi_j\}$. Do đó, ta có thể giả sử $\varphi_j \geq w$ trên Ω, $(dd^c\varphi_j)^n \geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu$, $\varphi_j \nearrow u$ h.k.n. Vậy, $\varphi_j \to u$ trong C_n- dung lượng. Do đó bởi [24] $(dd^c\varphi_j)^n \longrightarrow (dd^c u)^n$ yếu. Do đó theo định nghĩa

$$\forall\ \theta \in C_0^\infty(\Omega) : \int\limits_\Omega \theta(dd^c\varphi_j)^n \geq \int\limits_\Omega \theta 1_{\{w>-\infty\}} d\mu$$

Do đó,

$$\int\limits_\Omega \theta(dd^c u)^n \geq \int\limits_\Omega \theta 1_{\{w>-\infty\}} d\mu,$$

và suy ra, $(dd^c u)^n \geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu$.
Từ $w \leq u$ ta có

$$\begin{aligned} 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n &\geq 1_{\{u>-\infty\}}1_{\{w>-\infty\}}\mu = 1_{\{u>-\infty\}\cap\{w>-\infty\}}\mu \\ &\geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ $w \leq u \leq v$ trên Ω ta có: $\{w = -\infty\} = \{u = -\infty\} \cup \{(w = -\infty) \cap (u > -\infty)\}$. Vậy

$$1_{\{w=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n + 1_{\{(w=-\infty)\cap(u>-\infty)\}}(dd^c u)^n.$$

Do đó

$$1_{\{w=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n.$$

Do $1_{\{(w=-\infty)\cap(u>-\infty)\}}(dd^c u)^n = 0$ nên theo Bổ đề 4.1 trong [5] và (2.5) ta có:

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n = 1_{\{w=-\infty\}}(dd^c u)^n \geq 1_{\{w=-\infty\}}(dd^c v)^n = 1_{\{w=-\infty\}}\mu. \quad (2.6)$$

Từ (2.6) suy ra:

$$\begin{aligned}(dd^c u)^n &= 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n + 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n \\ &\geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu + 1_{\{w=-\infty\}}\mu = \mu.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Với mỗi $j = 1, 2, \ldots, \ldots,$ đặt

$$v_j = \Big(\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq \max(v, f-j), \quad (dd^c\varphi)^n \geq 1_{\{w>-\infty\}}\mu\}\Big)^*.$$

Do đó $u \leq v_j$ trên Ω, $\forall j$. Vậy $v_j \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ với mọi $j \geq 1$. Mà $v_{j+1} \leq v_j$ và $u = \lim\limits_{j\to\infty} v_j$. Và do $\max(v, f-j) \geq f-j$ trên Ω và $\max(v, f-j), f-j \in \mathcal{E}(\Omega)$ nên từ Bổ đề 4.1 trong [5] với mọi tập đa cực $A \subset \Omega$ ta có

$$\int\limits_A (dd^c \max(v, f-j))^n \leq \int\limits_A (dd^c f)^n = 0.$$

Như vậy, $(dd^c \max(v, f-j))^n$ triệt tiêu trên các tập đa cực trong Ω và $1_{\{w>-\infty\}}\mu + (dd^c \max(v, f-j))^n$ cũng triệt tiêu trên các tập đa cực. Nên theo Định lý 3.9 trong [23], tồn tại hàm $g_j \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho

$$(dd^c g_j)^n = 1_{\{w>-\infty\}}\mu + (dd^c \max(v, f-j))^n.$$

Từ $(dd^c g_j)^n \geq (dd^c \max(v, f-j))^n$ trên Ω nên $g_j \leq \max(v, f-j)$ trên Ω (theo Định lý 3.8 trong [23]). Từ định nghĩa, ta cũng có $g_j \leq v_j$ trên Ω. Nhưng $\max(v, f-j) \searrow v$ khi $j \to \infty$ và $\max(v, f-j), v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ thì theo Hệ quả 3.4 trong [5] ta có

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega (dd^c \max(v, f-j))^n = \int\limits_\Omega (dd^c v)^n = 1_{\{w=-\infty\}}\mu.$$

Sử dụng Mệnh đề 2.2 trong [34] ta được kết quả sau:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega (dd^c u)^n &= \lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega (dd^c v_j)^n \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega (dd^c g_j)^n = 1_{\{w>-\infty\}}\mu + \lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega (dd^c \max(v, f-j))^n \\ &= 1_{\{w>-\infty\}}\mu + 1_{\{w=-\infty\}}\mu = \mu(\Omega).\end{aligned}$$

Từ (2.7) và đánh giá trên ta suy ra $(dd^c u)^n = \mu$ và ta được điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.2.3. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Giả sử $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy tăng các miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Khi đó với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

thì tồn tại dãy giảm $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω và $(dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n$ trong Ω_j.

Chứng minh. Theo giả thiết $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$, $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và bởi Mệnh đề 4.2 trong [44] cho ta $u \in \mathcal{E}(\Omega_j)$ $\forall j \geq 1$. Từ $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ và theo định nghĩa của hàm đa điều hòa dước cực đại nên $f \in MPSH^-(\Omega_j) \cap \mathcal{E}(\Omega_j)$ $\forall j \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại dãy giảm $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $\psi_j \geq \psi_{j+1} \geq u$ trong Ω_j và

$$(dd^c \psi_j)^n = 1_{\{u=-\infty\}} (dd^c u)^n,$$

trong Ω_j. Thật vậy, ta sẽ dùng phương pháp quy nạp để xây dựng dãy ψ_j. Đặt $\Omega_0 = \varnothing$. Theo Bổ đề 2.2.2 tồn tại $v_1 \in \mathcal{F}(\Omega_1, f)$ sao cho $v_1 \geq u$ trong Ω_1 và

$$(dd^c v_1)^n = 1_{\{u=-\infty\}} (dd^c u)^n,$$

trong Ω. Đặt $\psi_1 = v_1$. Giả sử ta đã xác định được $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$, $\psi_j \geq \psi_{j+1} \geq u$ trong Ω_j và $(dd^c \psi_j)^n = 1_{\{u=-\infty\}} (dd^c u)^n$ trong Ω_j với $j = 1, \ldots, k$. Tiếp theo ta sẽ tìm $\psi_{k+1} \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$ sao cho $\psi_{k+1} \geq u$ trên Ω_{k+1}, $\psi_{k+1} \leq \psi_k$ trên Ω_k và $(dd^c \psi_{k+1})^n = 1_{\{u=-\infty\}} (dd^c u)^n$ trong Ω_{k+1}. Bởi Bổ đề 2.2.2 tồn tại dãy $v_{k+1} \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$ sao cho $v_{k+1} \geq u$ trên Ω_{k+1} và

$$(dd^c v_{k+1})^n = 1_{(\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k) \cap \{u=-\infty\}} (dd^c u)^n, \tag{2.8}$$

trong Ω_{k+1}. Từ Định lý 1.1 trong [34] tồn tại $w_k \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$, sao cho $w_k \leq \psi_k$ trong Ω_k và

$$\int_{\Omega_{k+1}} (dd^c w_k)^n \leq \int_{\Omega_k} (dd^c \psi_k)^n \leq \int_{\Omega_k} (dd^c u)^n \leq \int_{\Omega} (dd^c u)^n < \infty.$$

Đặt $\widetilde{\psi}_k = \max(w_k, u)$ trên Ω_{k+1}.
Ta có $f \geq \widetilde{\psi}_k \geq w_k > h + f$, $h \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$. Do đó $\widetilde{\psi}_k \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$ và $\widetilde{\psi}_k \geq u$ trên Ω_{k+1}. Mặt khác sử dụng Mệnh đề 2.2 trong [34] ta được

$$\int\limits_{\Omega_{k+1}} (dd^c \widetilde{\psi}_k)^n \leq \int\limits_{\Omega_{k+1}} (dd^c w_k)^n \leq \int\limits_{\Omega_k} (dd^c \psi_k)^n \leq \int\limits_{\Omega_k} (dd^c u)^n < \infty.$$

và $\widetilde{\psi}_k \leq \psi_k$ trong Ω_k, do vậy $\{\psi_k = -\infty\} \subset \{\widetilde{\psi}_k = -\infty\}$. Bởi Bổ đề 4.1 trong [5] ta có:

$$\begin{aligned} (dd^c \widetilde{\psi}_k)^n \geq 1_{\{\widetilde{\psi}_k = -\infty\}} (dd^c \widetilde{\psi}_k)^n &\geq 1_{\{\widetilde{\psi}_k = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n \\ &\geq 1_{\{\psi_k = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n, \end{aligned} \tag{2.9}$$

trong Ω. Ta chứng minh $1_{\{\psi_k = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n = (dd^c \psi_k)^n$ trong Ω_k. Thật vậy, từ $u \leq \psi_k$ trong Ω_k nên $\{\psi_k = -\infty\} \subset \{u = -\infty\}$. Viết $\{u = -\infty\} = \{\psi_k = -\infty\} \cup (\{u = -\infty\} \cap \{\psi_k > -\infty\})$ do vậy:

$$\begin{aligned} 1_{\{u = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n &= 1_{\{\psi_k = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n + 1_{(\{u = -\infty\} \cap \{\psi_k > -\infty\})} (dd^c \psi_k)^n \\ &= 1_{\{\psi_k = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n, \end{aligned}$$

trong Ω_k. Theo quy nạp ta có: $(dd^c \psi_k)^n = 1_{\{u = -\infty\}} (dd^c u)^n$ trong Ω_k. Vậy $1_{\{\psi_k = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n = 1_{\{u = -\infty\}} (dd^c \psi_k)^n = 1_{\{u = -\infty\}} (dd^c u)^n = (dd^c \psi_k)^n$ trong Ω_k.
Mặt khác,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} (dd^c \psi_k)^n \leq \int_{\Omega_k} (dd^c \widetilde{\psi}_k)^n &\leq \int_{\Omega_{k+1}} (dd^c \widetilde{\psi}_k)^n \\ &\leq \int_{\Omega_k} (dd^c \psi_k)^n < \infty. \end{aligned}$$

Do đó,

$$(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n = 1_{\Omega_k}(dd^c\psi_k)^n = 1_{\Omega_k\cap\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n$$

trong Ω_{k+1}. Đặt

$$\psi_{k+1} := \Big(\sup\{\varphi \in PSH^-(\Omega_{k+1}) : \varphi \le \min(v_{k+1}, \widetilde{\psi}_k) \text{ trong } \Omega_{k+1}\}\Big)^*.$$

Do $v_{k+1}+\widetilde{\psi}_k \le \widetilde{\psi}_{k+1}, v_{k+1}+\widetilde{\psi}_k \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$ nên $\psi_{k+1} \in \mathcal{F}(\Omega_{k+1}, f)$, $\psi_{k+1} \ge u$ trên Ω_{k+1} và $\psi_{k+1} \le \widetilde{\psi}_k \le \psi_k$ trong Ω_k. Theo Mệnh đề 2.2 trong [44] ta có

$$1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c\psi_{k+1})^n \le (dd^c v_{k+1})^n + (dd^c\widetilde{\psi}_k)^n,$$

trong Ω_{k+1}. Mặt khác, do $\psi_{k+1} \le \widetilde{\psi}_k$ trong Ω_{k+1} nên $\{\psi_{k+1} > -\infty\} \subset \{\widetilde{\psi}_k > -\infty\}$ và ta có:

$$1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n \le 1_{\{\widetilde{\psi}_k>-\infty\}}(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n, \tag{2.10}$$

trong Ω_{k+1}. Tương tự, từ $\psi_{k+1} \le v_{k+1}$ trong Ω_{k+1} kéo theo

$$1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c v_{k+1})^n \le 1_{\{v_{k+1}>-\infty\}}(dd^c v_{k+1})^n, \tag{2.11}$$

trong Ω_{k+1}. Kết hợp (2.10) và (2.11) ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} 1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c\psi_{k+1})^n &\le 1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c v_{k+1})^n + 1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n \\ &\le 1_{\{v_{k+1}>-\infty\}}(dd^c v_{k+1})^n + 1_{\{\widetilde{\psi}_k>-\infty\}}(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

trong Ω_{k+1} bởi vì giá của $(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n$ và $(dd^c v_{k+1})^n$ lần lượt là các tập đa cực $\Omega_k \cap \{u = -\infty\}$ và $(\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k) \cap \{u = -\infty\}$ trong Ω_{k+1}. Do đó,

$$(dd^c\psi_{k+1})^n = 0, \tag{2.12}$$

trong $\Omega_{k+1} \cap \{\psi_{k+1} > -\infty\}$. Mặt khác từ $v_{k+1} + \widetilde{\psi}_k \le \psi_{k+1}$ nên $v_{k+1} + \widetilde{\psi}_k \le \psi_{k+1} \le v_{k+1}$ trong Ω_{k+1}. Vậy nếu $B \subset \Omega_{k+1}\backslash\Omega_k$ là tập đa cực thì theo Bổ đề 4.1 trong [5] ta có:

$$\int_B (dd^c(v_{k+1} + \widetilde{\psi}_k))^n \ge \int_B (dd^c\psi_{k+1})^n \ge \int_B (dd^c v_{k+1})^n. \tag{2.13}$$

Hơn nữa theo Bổ đề 4.4 trong [5], $B \subset \Omega_{k+1} \setminus \Omega_k$, $\mathrm{supp}(dd^c\widetilde{\psi}_k)^n \subset \Omega_k \cap \{u = -\infty\}$ kéo theo

$$\int_B (dd^c(v_{k+1} + \widetilde{\psi}_k))^n = \int_B (dd^c v_{k+1})^n.$$

Bởi (2.13) ta có

$$\int_B (dd^c\psi_{k+1})^n = \int_B (dd^c v_{k+1})^n.$$

Do vậy, ta được

$$(dd^c\psi_{k+1})^n = (dd^c v_{k+1})^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n, \tag{2.14}$$

trong $(\Omega_{k+1}\backslash\Omega_k) \cap \{\psi_{k+1} = -\infty\}$. Tương tự ta có

$$(dd^c\psi_{k+1})^n = (dd^c\widetilde{\psi}_k)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n, \tag{2.15}$$

trong $\Omega_k \cap \{\psi_{k+1} = -\infty\}$. Từ (2.14) và (2.15) suy ra:

$$(dd^c\psi_{k+1})^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n, \tag{2.16}$$

trong $\Omega_{k+1} \cap \{\psi_{k+1} = -\infty\}$.
Do $\Omega_{k+1} \cap \{\psi_{k+1} = -\infty\} = \Omega_k \cap \{\psi_{k+1} = -\infty\} \cup \{\Omega_{k+1}\backslash\Omega_k\} \cap \{\psi_{k+1} = -\infty\}$, từ (2.12) và (2.16) ta có:

$$\begin{aligned}(dd^c\psi_{k+1})^n &= 1_{\{\psi_{k+1}>-\infty\}}(dd^c\psi_{k+1})^n + 1_{\{\psi_{k+1}=-\infty\}}(dd^c\psi_{k+1})^n \\ &= 1_{\{\psi_{k+1}=-\infty\}}(dd^c\psi_{k+1})^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n,\end{aligned}$$

trong Ω_{k+1}. Như vậy ta đã xây dựng được dãy ψ_{k+1} thỏa mãn tất cả các điều kiện đặt ra.
Tiếp theo, đặt

$$u_j = \Big(\sup\{\varphi \in \mathcal{F}(\Omega_j, f) : \varphi \le \psi_j, (dd^c\varphi)^n \ge 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \text{ trong } \Omega_j\}\Big)^*.$$

Dùng lý luận như chứng minh trong trường hợp 2 của Bổ đề 2.2.2, $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ và $u_j \ge u_{j+1} \ge u$ trong Ω_j. Từ $(dd^c\psi_j)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n$ trong Ω_j, theo chứng minh trong trường hợp 2 của Bổ đề 2.2.2 suy ra $(dd^c u_j)^n =$

$1_{\Omega_j}(dd^c u)^n$ trong Ω_j. Lại có,

$$\sup_j \int_{\Omega_j} (dd^c u_j)^n \leq \int_{\Omega} (dd^c u)^n < \infty,$$

nên theo Mệnh đề 4.6 trong [44] thì $w := \lim_{j\to\infty} u_j \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ kéo theo $w \geq u$ trong Ω và

$$(dd^c w)^n = \lim_{j\to\infty} (dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n,$$

trong Ω. Do đó, từ phần b) của Mệnh đề 2.1.3 ta có $u = w$. Như vậy, $u_j \searrow u$ trong Ω và ta được điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng ta chứng minh định lý chính. Định lý 2.2.1.

Chứng minh Định lý 2.2.1. Lấy $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Lấy $\{\widetilde{\Omega}_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy các miền siêu lồi bị chặn $\Omega_j \Subset \widetilde{\Omega}_j \Subset \widetilde{\Omega}_{j+1} \Subset \widetilde{\Omega}$ và $\widetilde{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{\Omega}_j$. Theo Bổ đề 2.2.3 thì tồn tại $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω và $(dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n$ trong Ω_j. Bởi Mệnh đề 5.1 trong [44], tồn tại $\widetilde{u}_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_j, f)$ sao cho $\widetilde{u}_j \leq u_j$ trong Ω_j và $(dd^c \widetilde{u}_j)^n = 1_{\Omega_j}(dd^c u_j)^n = 1_{\Omega_j}(dd^c u)^n$ trong $\widetilde{\Omega}_j$.
Ta chứng minh $\widetilde{u}_{j+1} \leq \widetilde{u}_j$ trong $\widetilde{\Omega}_j$. Thật vậy, do độ đo $1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n$ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực là tập con của Ω_j và

$$(dd^c \widetilde{u}_j)^n = 1_{\Omega_j}(dd^c u)^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \ \text{ trên } \ \Omega_j,$$

và

$$(dd^c \widetilde{u}_{j+1})^n = 1_{\Omega_{j+1}}(dd^c u)^n \geq 1_{\Omega_j}(dd^c u)^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \ \text{ trên } \ \Omega_j,$$

nên theo Mệnh đề 4.3 trong [47] ta có:

$$(dd^c \max(\widetilde{u}_j, \widetilde{u}_{j+1}))^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \text{ trong } \Omega_j. \tag{2.17}$$

Từ (2.17) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&1_{\{\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})>-\infty\}}(dd^c\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1}))^n \geq 1_{\{\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})>-\infty\}}1_{\{u>-\infty\}}(dd^cu)^n\\
&= \Big(1_{\{\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})>-\infty\}} + 1_{\{\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})=-\infty\}}\Big)1_{\{u>-\infty\}}(dd^cu)^n\\
&= 1_{\{u>-\infty\}}(dd^cu)^n,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

trong Ω_j. Mặt khác do $u \leq u_j$ trên Ω_j nên ta có:

$$\begin{aligned}
1_{\{u_j=-\infty\}}(dd^cu_j)^n &= 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu_j)^n - 1_{\{u=-\infty\}\cap\{u_j>-\infty\}}(dd^cu_j)^n\\
&= 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu_j)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu)^n,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

trong Ω_j bởi vì $(dd^cu_j)^n = (dd^cu)^n$ trong Ω_j. Do $\widetilde{u}_j \leq u_j$ và $\widetilde{u}_{j+1} \leq u_{j+1} \leq u_j$ trong Ω_j bởi Bổ đề 4.1 trong [5] ta có:

$$\begin{aligned}
&1_{\{\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})=-\infty\}}(dd^c\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1}))^n \geq 1_{\{\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})=-\infty\}}(dd^cu_j)^n\\
&\geq 1_{\{u_j=-\infty\}}(dd^cu_j)^n = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu)^n,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

trên Ω_j. Kết hợp (2.18) và (2.20) ta được

$$(dd^c\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1}))^n \geq 1_{\Omega_j}(dd^cu)^n = (dd^c\widetilde{u}_j)^n \tag{2.21}$$

trong $\widetilde{\Omega}_j$. Mặt khác, từ $\widetilde{u}_j, \max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1}) \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_j, f)$ và (2.21) ta có :

$$\int_{\widetilde{\Omega}_j}(dd^c\widetilde{u}_j)^n \leq \int_{\widetilde{\Omega}_j}(dd^c\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1}))^n \leq \int_{\widetilde{\Omega}_j}(dd^c\widetilde{u}_j)^n < \infty.$$

Như vậy $(dd^c\widetilde{u}_j)^n = (dd^c\max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1}))^n$ trên $\widetilde{\Omega}_j$. Theo Định lý 3.6 trong [5] ta có $\widetilde{u}_j = \max(\widetilde{u}_j,\widetilde{u}_{j+1})$ trong $\widetilde{\Omega}_j$. Do đó, $\widetilde{u}_{j+1} \leq \widetilde{u}_j$ trong $\widetilde{\Omega}_j$.
Tiếp theo, bởi vì

$$\int_{\widetilde{\Omega}_j}(dd^c\widetilde{u}_j)^n = \int_{\Omega_j}(dd^cu_j)^n \leq \int_{\Omega}(dd^cu)^n < \infty,$$

nên

$$\sup_j \int_{\widetilde{\Omega}_j}(dd^c\widetilde{u}_j)^n < \infty.$$

Do đó, theo Mệnh đề 4.6 trong [44] ta có $\widetilde{u} = \lim\limits_{j\to\infty} \widetilde{u}_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}, f)$. Rõ ràng khi đó $(dd^c\widetilde{u})^n = (dd^c u)^n$ trên Ω và $\widetilde{u} \leq u$ trên Ω. Tuy nhiên, từ $(dd^c\widetilde{u}_j)^n \leq 1_\Omega(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}_j$, nên $(dd^c\widetilde{u})^n \leq 1_\Omega(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$. Do đó, ta được $(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$. Định lý được chứng minh. □

2.3 Ứng dụng

Trong phần này dùng kết quả về dưới thác triển cho miền siêu lồi không bị chặn, chúng tôi áp dụng vào giải quyết bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn. Chúng tôi thiết lập kết quả của Hed trong [38] cho các miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi chứng minh định lý sau đây:

Định lý 2.3.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi không chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy các miền siêu lồi không bị chặn sao cho $\Omega \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ và $PSH^s(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1) \neq \varnothing$. Giả sử tồn tại $\psi \in \mathcal{F}(\Omega)$ và $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ sao cho $\psi < 0$ trên Ω và $\psi_j \nearrow \psi$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$. Khi đó với mọi $f \in MPSH^-(\Omega_1) \cap \mathcal{C}(\Omega_1)$ và với mọi $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho*

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty,$$

tồn tại dãy các hàm $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \nearrow u$ hầu khắp nơi trên Ω khi $j \nearrow \infty$.

Để chứng minh Định lí 2.3.1 ta cần chứng minh một mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3.2. *Cho Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $PSH^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$ và $f \in MPSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Giả sử $u \in \mathcal{E}(\Omega, f)$ sao cho $\int\limits_\Omega (dd^c u)^n < \infty$. Khi đó $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω khi $j \nearrow \infty$ và*

$$\sup_j \int\limits_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty.$$

Chứng minh. Giả sử $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Lấy $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $\rho < 0$ trong Ω. Đặt $u_j = \max(u, j\rho + f)$. Do $j\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega), j\rho + f \leq u_j \leq f$ nên $u_j \in \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ và $u_j \searrow u$ trong Ω khi $j \nearrow \infty$. Từ $u \leq u_j$ bởi Mệnh đề 2.1.3 ta có:

$$\sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n \leq \int_\Omega (dd^c u)^n < \infty \Rightarrow \sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty.$$

Vậy điều kiện cần được chứng minh.
Ngược lại, giả sử tồn tại dãy $u_j \in \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ sao cho $u_j \searrow u$ trong Ω khi $j \nearrow \infty$ và

$$\sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty.$$

Lấy $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy các miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1} \Subset \Omega$ và $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Theo [23] tồn tại $u_{j,k} \in \mathcal{F}(\Omega_k, f)$ sao cho $(dd^c u_{j,k})^n = (dd^c u_j)^n$ trong Ω_k. Theo Hệ quả 3.2 trong [5] ta được $u_{j,k} \searrow u_j$ khi $k \nearrow \infty$. Đặt

$$\psi_{j,k} = (\sup\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \varphi + f \leq u_{j,k} \text{ trên } \Omega_k\})^*.$$

Do $u_{j,k} \in \mathcal{F}(\Omega_k, f)$ suy ra tồn tại $h_k \in \mathcal{F}(\Omega_k)$ sao cho $h_k + f \leq u_{j,k}$ trong Ω_k. Do đó $h_k \leq \psi_{j,k}$ suy ra $\psi_{j,k} \in \mathcal{F}(\Omega_k)$. Mặt khác theo Định lý 2.1 trong [23] tồn tại $\widetilde{u}_k \in \mathcal{F}(\Omega_k)$ với $\widetilde{u}_k + f \leq u_{j,k}$ trên Ω_k và

$$\int\limits_{\Omega_k} (dd^c \widetilde{u}_k)^n \leq \int\limits_{\Omega_k} (dd^c u_{j,k})^n.$$

Khi đó $\widetilde{u}_k \leq \psi_{j,k}$ và ta có đánh giá sau:

$$\int\limits_{\Omega_k} (dd^c \psi_{j,k})^n \leq \int_{\Omega_k} (dd^c \widetilde{u}_k)^n \leq \int_{\Omega_k} (dd^c u_{j,k})^n.$$

Suy ra $\psi_{j,k} \searrow \psi_j$ khi $k \nearrow \infty$, trong đó

$$\psi_j = \Big(\sup\{\varphi \in PSH^-(\Omega) : \varphi + f \leq u_j \ \text{ trên } \ \Omega\}\Big)^*.$$

Theo giả thiết $u_j \in \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ nên $\exists l_j \in \mathcal{E}_0(\Omega), l_j + f \leq u_j \leq f$. Do đó $l_j \leq \psi_j$ và suy ra $\psi_j \in \mathcal{E}_0(\Omega)$. Cố định $k_0 \geq 1$. Do $\psi_{j,k} \searrow \psi_j \Rightarrow \psi_{j,k} \geq \psi_j$. Vậy bởi

[24] ta có $(dd^c\psi_{j,k})^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c\psi_j)^n$ trên Ω_{k_0} khi $k \to \infty$. Với $k \geq k_0$ ta có

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{k_0}} (dd^c\psi_j)^n &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_{k_0}} (dd^c\psi_{j,k})^n \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} (dd^c\psi_{j,k})^n \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} (dd^c u_{j,k})^n \leq \int_{\Omega} (dd^c u_j)^n.\end{aligned}$$

Cho $k_0 \to \infty$ ta được

$$\sup_j \int_\Omega (dd^c\psi_j)^n \leq \sup_j \int_\Omega (dd^c u_j)^n < \infty.$$

Dãy $\psi_j \searrow$ vì $u_j \searrow$ và do đó $\psi = \lim\limits_{j\to\infty} \psi_j \in \mathcal{F}(\Omega)$. Hơn nữa do $\psi_j + f \leq u_j \leq f$ trên Ω, cho $j \to \infty$ ta được $\psi + f \leq u \leq f$ trong Ω. Vậy $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ và ta được điều cần chứng minh. □

Bây giờ ta chứng minh Định lý 2.3.1

Chứng minh Định lý 2.3.1. Giả sử $u \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ sao cho

$$\int_\Omega (dd^c u)^n < \infty.$$

Theo Định lý 2.2.1 thì tồn tại $u_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ sao cho $u_j \leq u$ trong Ω và $(dd^c u_j)^n = 1_\Omega (dd^c u)^n$ trong Ω_j. Ta chứng minh $u_{j+1} \geq u_j$ trong Ω_{j+1}.
Thật vậy, ta có $(dd^c u_j)^n = 1_\Omega (dd^c u)^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n$ và $(dd^c u_{j+1})^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n$ trong Ω theo Mệnh đề 4.3 trong [47] ta có

$$(dd^c \max(u_{j+1}, u_j))^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \text{ trong } \Omega.$$

Sử dụng lý luận tương tự cách chứng minh (2.18), ta có

$$1_{\{\max(u_j,u_{j+1})>-\infty\}}(dd^c \max(u_j, u_{j+1}))^n \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n \tag{2.22}$$

trong Ω. Hơn nữa, do $u_j \leq u$ và $u_{j+1} \leq u$ trong Ω ta có:

$$\{\max(u_j, u_{j+1}) = -\infty\} = \{u = -\infty\} \cup (\{\max(u_j, u_{j+1}) = -\infty\} \cap \{u > -\infty\})$$

nên ta suy ra

$$\begin{aligned}1_{\{\max(u_j,u_{j+1})=-\infty\}}(dd^cu)^n &= 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu)^n + 1_{\{\max(u_j,u_{j+1})=-\infty\}\cap\{u>-\infty\}\}}(dd^cu)^n \\ &= 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu)^n.\end{aligned} \tag{2.23}$$

trong Ω. Nhưng $\max(u_{j+1}, u_j) \leq u$ trong Ω nên theo Bổ đề 4.1 trong [5] và (2.23) ta có

$$\begin{aligned}1_{\{\max(u_{j+1},u_j)=-\infty\}}(dd^c\max(u_{j+1},u_j))^n &\geq 1_{\{\max(u_{j+1},u_j)=-\infty\}}(dd^cu)^n \\ &= 1_{\{u=-\infty\}}(dd^cu)^n,\end{aligned} \tag{2.24}$$

trong Ω. Vậy kết hợp (2.22) và (2.24) ta có:

$$(dd^c\max(u_{j+1},u_j))^n \geq 1_\Omega(dd^cu)^n = (dd^cu_{j+1})^n \text{ trong } \Omega_{j+1}.$$

Vậy bởi Mệnh đề 2.1.3 ta có $\max(u_{j+1}, u_j) = u_{j+1}$ trong Ω_{j+1}. Do đó $u_{j+1} \geq u_j$ trong Ω_{j+1} và ta có điều cần chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh $u_j \nearrow u$ h.k.n trong Ω. Thật vậy, đặt $w = (\lim\limits_{j\to\infty} u_j)^*$ trong Ω. Ta thấy $w \in PSH^-(\Omega)$ và $w \leq u$ trong Ω. Lấy $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $\rho < 0$ trong Ω. Đặt $w_k := \max(w, k\psi + f, k\rho + f)$ thì $k\rho + f \leq w_k \leq f$ nên $w_k \in \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ và $w_k \searrow w$ trong Ω khi $k \nearrow \infty$. Nhưng $\max(u_j, k\psi_j + f) \nearrow \max(w, k\psi + f)$ h.k.n khi $j \nearrow \infty$ nên theo cách chứng minh trong Mệnh đề 2.1.3 ta có $(dd^c\max(u_j, k\psi_j + f))^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c\max(w, k\rho + f))^n$ trong Ω khi $j \nearrow \infty$. Bởi Mệnh đề 2.1.3 ta có:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (dd^cw_k)^n &\leq \int_\Omega (dd^c\max(w, k\rho + f))^n \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega (dd^c\max(u_j, k\psi_j + f))^n \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} (dd^c\max(u_j, k\psi_j + f))^n \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega_j} (dd^cu_j)^n = \int_\Omega (dd^cu)^n.\end{aligned}$$

Vậy

$$\sup_k \int_\Omega (dd^c w_k)^n \leq \int_\Omega (dd^c u)^n < \infty.$$

Như vậy theo Mệnh đề 2.3.2 ta có $w \in \mathcal{F}(\Omega, f)$. Mặt khác ta thấy với mọi miền siêu lồi bị chặn $D \Subset \Omega$ thì $u_j, w \in \mathcal{E}(D)$,$\forall j \geq 1$ (Theo Mệnh đề 4.2 trong [44]). Mà ta có $u_j \nearrow w$ h.k.n trong D nên bởi [24] ta có $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c w)^n$ trong D. Do đó, $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu tới $(dd^c w)^n$ trong Ω. Mà $(dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n$ trong Ω bởi vậy $(dd^c w)^n \leq (dd^c u)^n$ trong Ω. Do đó theo Mệnh đề 2.1.3 ta có $w = u$ trong Ω. Vậy $u_j \nearrow u$ h.k.n trong Ω khi $j \nearrow \infty$. Định lý được chứng minh. □

Kết luận chương 2: Việc chứng minh được Định lí 2.2.1 và Định lí 2.3.1 ở chương 2 đã cho ta các kết quả sau đây,

• Chỉ ra được sự tồn tại dưới thác triển các hàm đa điều hòa dưới thuộc lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền miền siêu lồi không bị trặn trong $\mathbb{C}^n$. Đồng thời chứng minh được trong lớp đó thì độ đo Monge-Apère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là không thay đổi.

• Ứng dụng kết quả về dưới thác triển trên miền siêu lồi không bị chặn vào bài toán xấp xỉ hàm đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ trên miền Ω siều lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Chương 3

Dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới

Như trong phần tổng quan đã giới thiệu, trong chương này chúng tôi nghiên cứu vấn đề dưới thác triển của các hàm m-điều hòa dưới trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là m-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Chúng tôi cũng chỉ ra đẳng thức giữa độ đo Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho.

Chương 3 gồm hai phần. Trong phần thứ nhất, chúng tôi dành để trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho chương này. Phần thứ hai, chúng tôi chứng minh một số mệnh đề, bổ đề để áp dụng cho việc chứng minh kết quả dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới và hệ quả của nó.

Chương 3 được rút ra từ bài báo [4] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án).

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$ với dạng Kähler chính tắc $\beta = dd^c\|z\|^2$. Theo [15], đặt

$$\Gamma_m = \{\eta \in C_{(1,1)} : \eta \wedge \beta^{n-1} \geq 0, \ldots, \eta^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0\},$$

ở đây $C_{(1,1)}$ kí hiệu là không gian $(1,1)$ - dạng với hệ số là hằng.

Định nghĩa 3.1.1. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Ta nói rằng u là hàm m-điều hòa dưới trên Ω nếu với mọi $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1} \in \Gamma_m$ bất đẳng thức*

$$dd^c u \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0,$$

đúng theo nghĩa dòng.

Kí hiệu $SH_m(\Omega)$ là tập các hàm m-điều hòa dưới trên Ω và $SH_m^-(\Omega)$ là kí hiệu tập các hàm m- điều hòa dưới âm trên Ω.
Trước khi thiết lập các tính chất của hàm m-điều hòa dưới ta nhắc lại tính chất sau (xem [15]) Giả sử $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta xác định

$$S_m(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}.$$

Kí hiệu $\mathcal{H}$ là không gian véctơ các ma trận Hermite phức cấp $n \times n$ trên $\mathbb{R}$. Với $A \in \mathcal{H}$ đặt $\lambda(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ là các giá trị riêng của A. Đặt

$$\widetilde{S}_m(A) = S_m(\lambda(A)).$$

Như trong [37] ta xác định

$$\widetilde{\Gamma}_m = \{A \in \mathcal{H} : \lambda(A) \in \Gamma_m\} = \{\widetilde{S}_1 \geq 0\} \cap \cdots \cap \{\widetilde{S}_m \geq 0\}.$$

Bây giờ chúng tôi liệt kê các tính chất cơ bản của lớp hàm m-điều hòa dưới. Việc chứng minh những tính chất đó được lặp lại như việc chứng minh đối với các tính chất hàm đa điều hòa dưới trong lý thuyết đa thế vị và có thể tham khảo trong các tài liệu [1] và [31].

Mệnh đề 3.1.2. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta có*

(a) $PSH(\Omega) = SH_n(\Omega) \subset SH_{n-1}(\Omega) \subset \cdots \subset SH_1(\Omega) = SH(\Omega)$. Do đó, $u \in SH_m(\Omega)$, $1 \leq m \leq n$, thì $u \in SH_r(\Omega)$, với mọi $1 \leq r \leq m$.

(b) Nếu u thuộc lớp C^2 thì u là m-điều hòa dưới nếu và chỉ nếu $dd^c u$ thuộc $\widetilde{\Gamma}_m$ tại mỗi điểm.

(c) Nếu $u, v \in SH_m(\Omega)$ và $\alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v \in SH_m(\Omega)$.

(d) Nếu $u, v \in SH_m(\Omega)$ *thì* $\max\{u, v\} \in SH_m(\Omega)$.

(e) Nếu $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *là họ các hàm m-điều hòa dưới,* $u = \sup_j u_j < +\infty$ *và u là nửa liên tục trên thì u là hàm m-điều hòa dưới.*

(f) Nếu $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *là dãy giảm các hàm m-điều hòa dưới thì hàm* $u = \lim_{j\to+\infty} u_j$ *là m-diều hòa dưới .*

(g) Giả sử $\rho \geq 0$ *là hàm bán kính trơn trong* $\mathbb{C}^n$ *triệt tiêu ngoài hình cầu đơn vị và thỏa mãn* $\int_{\mathbb{C}^n} \rho dV_n = 1$*, ở đó* dV_n *kí hiệu là độ đo Lebesgue của* $\mathbb{C}^n$*. Với* $u \in SH_m(\Omega)$ *ta định nghĩa*

$$u_\varepsilon(z) := (u * \rho_\varepsilon)(z) = \int_{\mathbb{B}(0,\varepsilon)} u(z-\xi)\rho_\varepsilon(\xi)dV_n(\xi),\ \forall z \in \Omega_\varepsilon,$$

ở đó $\rho_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}}\rho(z/\varepsilon)$ *và* $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$*. Khi đó* $u_\varepsilon \in SH_m(\Omega_\varepsilon) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ *và* $u_\varepsilon \downarrow u$ *khi* $\varepsilon \downarrow 0$.

(h)Giả sử $u_1, \ldots, u_p \in SH_m(\Omega)$ *và* $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *là hàm lồi, tăng theo mỗi biến. Nếu* χ *có thể mở rộng liên tục tới hàm* $[-\infty, +\infty)^p \to [-\infty, \infty)$*, thì* $\chi(u_1, \ldots, u_p) \in SH_m(\Omega)$.

Ví dụ 3.1.3. Xét $u(z_1, z_2, z_3) = 3|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_3|^2$. Theo tính chất (b) của mệnh đề 3.1.2 ta thấy $u \in SH_2(\mathbb{C}^3)$. Tuy nhiên, u không là đa điều hòa dưới trong $\mathbb{C}^3$ bởi vì hạn chế của u trên đường thẳng $\{(0, 0, z_3) : z_3 \in \mathbb{C}\}$ là $u(0, 0, z_3) = -|z_3|^2$ không đa điều hòa dưới.

Bây giờ, dựa theo Z. Błocki, S. Dinew và S. Kołodziej chúng ta định nghĩa toán tử m-Hessian phức cho lớp các hàm m-điều hòa dưới bị chặn địa phương. Cụ thể, dựa vào [15] và [36] chúng tôi cho định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.4. *Giả sử* $u_1, \ldots, u_p \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$*. Khi đó toán tử Hessian phức* $H_m(u_1, \ldots, u_p)$ *được định nghĩa bằng quy nạp như sau:*

$$dd^c u_p \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m} = dd^c(u_p dd^c u_{p-1} \wedge \cdots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m}).$$

Từ định nghĩa của hàm m-điều hòa dưới và sử dụng lý luận như trong chứng minh của Định lý 2.1 trong [8] ta được $H_m(u_1, \ldots, u_p)$ là dòng dương đóng

song bậc $(n-m+p, n-m+p)$ và là toán tử liên tục trên dãy giảm các hàm m-điều hòa dưới bị chặn địa phương. Do đó, cho $p = m$, $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}$ là độ đo Borel không âm. Đặc biệt, khi $u = u_1 = \cdots = u_m \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ độ đo Borel

$$H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

là xác định và gọi là m-Hessian phức của u.

Tương tự định nghĩa 1.1.1 về dưới thác triển của hàm đa điều hòa dưới, ta định nghĩa dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới,

Định nghĩa 3.1.5. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và u là một hàm m-điều hòa dưới trên Ω ($u \in SH_m(\Omega)$). Hàm $\widetilde{u} \in SH_m(\widetilde{\Omega})$ được gọi là dưới thác triển của hàm u nếu $\widetilde{u}(z) \leq u(z)$, $\forall z \in \Omega$.*

Bây giờ ta nhắc lại miền m-siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ mà đã được giới thiệu trong [32]. Miền này được định nghĩa tương tự miền siêu lồi trong lý thuyết đa thế vị.

Định nghĩa 3.1.6. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ta nói rằng Ω là miền m-siêu lồi nếu tồn tại hàm m-điều hòa dưới liên tục $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^-$ sao cho $\Omega_c = \{u < c\} \Subset \Omega$ với mọi $c < 0$.*

Nhận xét 3.1.7. Từ định nghĩa của miền m-siêu lồi và định nghĩa của hàm m-điều hòa dưới, Ta thấy mọi hàm đa điều hòa dưới đều là m-điều hòa dưới với mọi $n \geq m \geq 1$ nên mọi miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ đều là m-siêu lồi.

Tiếp theo ta nhắc lại các lớp Cegrell của lớp hàm m-điều hòa dưới đã đưa ra trong [32], [31].

Định nghĩa 3.1.8. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền m-siêu lồi. Khi đó ta xác định các lớp hàm m-điều hòa dưới sau:*

$$\mathcal{E}^0_m = \mathcal{E}^0_m(\Omega) = \{u \in SH^-_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \lim_{z \to \partial\Omega} u(z) = 0, \quad \int_\Omega H_m(u) < \infty\}.$$

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_m(\Omega) = \big\{u \in SH_m^-(\Omega) : \exists \ \ \mathcal{E}_m^0 \ni u_j \searrow u, \ \ \sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty\big\}.$$

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(\Omega) = \big\{u \in SH_m^-(\Omega) : \forall z_0 \in \Omega, \exists \ \ \textit{lân cận} \ \ \omega \ni z_0, \ \ \textit{và}$$
$$\mathcal{E}_m^0 \ni u_j \searrow u \ \ \textit{trên} \ \ \omega, \sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty\big\}.$$

Nhận xét 3.1.9.
a) Từ các định nghĩa trên ta có quan hệ bao hàm sau $\mathcal{E}_m^0(\Omega) \subset \mathcal{F}_m(\Omega) \subset \mathcal{E}_m(\Omega)$.
b) Tương tự như Định lý 4.5 trong [21], Định lý 3.5 trong [31] khẳng định lớp $\mathcal{E}_m$ là lớp con lớn nhất của $SH_m^-(\Omega)$ thỏa mãn điều kiện:

(i) Nếu $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ và $v \in SH_m^-(\Omega)$ thì $\max\{u, v\} \in \mathcal{E}_m(\Omega)$.

(ii) Nếu $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ và $u_j \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega), u_j \searrow u$, thì $H_m(u_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(u)$.

Chúng ta cũng có một khái niệm tương tự như khái niệm hàm cực trị tương đối trong lý thuyết đa thế vị. Đó là khái niệm về hàm m-cực trị tương đối.

Định nghĩa 3.1.10. *Cho Ω là tập mở của $\mathbb{C}^n$ và $E \subset \Omega$. Hàm m-cực trị tương đối của E đối với Ω, được xác định bởi công thức*

$$h_{m,E,\Omega} = h_{m,E} = \sup\{u \in SH_m^-(\Omega) : u|_E \leq -1\}.$$

Như trong [32], $h^*_{m,E}$ là hàm m-điều hòa dưới âm trong Ω. Hơn nữa, nếu Ω là m- siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $\Omega' \Subset \Omega$ thì ta chứng minh được rằng $h_{m,\Omega'}$ thuộc $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$.
Tương tự như tập đa cực và định lý Josefson trong lý thuyết đa thế vị chúng ta cũng có tập m-cực và định lý Josefson cho tập m-cực.

Định nghĩa 3.1.11. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $E \subset \Omega$. E gọi là m-cực nếu với bất kỳ $a \in E$ tồn tại lân cận liên thông V_a của a trong Ω và $u \in SH_m(V), u \not\equiv -\infty$ sao cho $E \cap V_a \subset \{z \in V_a : u(z) = -\infty\}$.*

Định lý 2.35 trong [31] tương tự định lý Josefson trong lý thuyết đa thế vị đối với tập m- cực. Nghĩa là nếu $E \subset \Omega$ là tập m-cực khi và chỉ khi tồn tại hàm $u \in SH_m(\mathbb{C}^n)$ sao cho $u \equiv -\infty$ trên E.

Nhận xét 3.1.12.
a) Theo (a) của mệnh đề 3.1.2 mọi tập đa cực trong lý thuyết đa thế vị đều là tập m-cực với mọi $1 \leq m \leq n$.
b) Ví dụ 2.27 trong [32] chứng tỏ rằng tồn tại một tập m- cực E^n trong $\mathbb{C}^n$ nhưng nó không phải là tập đa cực.

3.2 Dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày kết quả về dưới thác triển trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$. Cụ thể chúng ta sẽ chứng minh định lý sau.

Định lý 3.2.1. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ là những miền m-siêu lồi bị chặn và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó tồn tại $w \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho $w \leq u$ trên Ω và*

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

trên $\widetilde{\Omega}$.

Trước hết chúng ta cần một mệnh đề tương tự như Bổ đề 2.1 trong [26] cho lớp hàm m-điều hòa dưới $\mathcal{F}_m$.

Mệnh đề 3.2.2. *Cho Ω là miền m-siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó*

$$e_m(u) = \int_\Omega H_m(u) < \infty.$$

Chứng minh. Lấy $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Từ định nghĩa của lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$, tồn tại dãy $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega), u_j \searrow u$ trên Ω sao cho

$$\sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty.$$

Theo Định lý 3.11 trong [32] dãy $\{H_m(u_j)\}$ hội tụ yếu tới $H_m(u)$. Do đó, ta có

$$e_m(u) = \int_\Omega H_m(u) \leq \varliminf_{j\to\infty} \int_\Omega H_m(u_j) \leq \sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty,$$

vậy mệnh đề được chứng minh. □

Ta cần dùng kết quả sau.

Mệnh đề 3.2.3. *Cho Ω là miền m-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{u_j\} \subset \mathcal{F}_m(\Omega)$ là dãy giảm hội tụ tới $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Nếu $\varphi \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ thì*

$$\lim_j \int_\Omega \varphi H_m(u_j) = \int_\Omega \varphi H_m(u).$$

Chứng minh. Từ $(-\varphi)$ là nửa liên tục dưới và $(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}$ hội tụ yếu tới $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ ta có kết quả

$$\varliminf_{j\to\infty} \int_\Omega (-\varphi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \geq \int_\Omega (-\varphi)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.1}$$

Lấy ϱ là hàm m- điều hòa dưới vét cạn đối với Ω. Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, đặt $\varphi_k = \max(\varphi, k\varrho)$ thì $\varphi_k \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ và φ_k giảm tới φ. Với mỗi k, j sử dụng tích phân từng phần (có hiệu lực đối với $\mathcal{F}_m(\Omega)$) ta có

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (-\varphi_k)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} &= \int_\Omega (-u_j)(dd^c \varphi_k) \wedge (dd^c u_j)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq \int_\Omega (-u)(dd^c \varphi_k) \wedge (dd^c u_j)^{m-1} \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_\Omega (-\varphi_k)(dd^c u) \wedge (dd^c u_j)^{m-1} \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Tiếp tục như vậy ta được

$$\int_\Omega (-\varphi_k)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_\Omega (-\varphi_k)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Cho $k \to +\infty$ và dùng Định lý hội tụ đơn điệu ta được

$$\int_\Omega (-\varphi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_\Omega (-\varphi)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.2}$$

Từ (3.2) ta có

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega (-\varphi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_\Omega (-\varphi)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.3}$$

(3.3) và (3.1) cho ta điều phải chứng minh. □

Để chứng minh Định lý 3.2.1 ta cần dùng bổ đề sau. Đây là kết quả cơ bản để chứng minh Định lý 3.2.1. Đồng thời nó cho chúng ta một kỹ thuật để tiếp cận bài toán dưới thác triển hàm m-điều hòa dưới.

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử Ω là miền m-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Khi đó tồn tại $g \in \mathcal{F}_m^a(\Omega), h \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho*

$$1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.4}$$

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} \tag{3.5}$$

và $h \geq u \geq g + h$ trên Ω.

Chứng minh. Từ $1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ triệt tiêu trên các tập m-cực của Ω, theo Định lý 1.2 trong [32] tồn tại duy nhất hàm $g \in \mathcal{F}_m^a(\Omega)$ sao cho

$$1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.6}$$

trên Ω. Đặt

$$h = \sup\{\varphi \in SH_m^-(\Omega) : u \geq g + \varphi, \quad \text{trên } \Omega\}.$$

ta thấy $h \geq u \geq g + h$ trên Ω. Ta cần sẽ chứng minh

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.7}$$

trên Ω. Ta có $g \leq u - h \leq 0$ và $(dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m}$ triệt tiêu trên các tập m-cực của Ω lặp lại cách chứng minh đã sử dụng để chứng minh Bổ đề 4.12 trong [5] ta được.

$$1_{\{h=-\infty\}}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.8}$$

trên Ω. Vậy ta cần chứng minh

$$1_{\{h>-\infty\}}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} = 0, \tag{3.9}$$

trên Ω. Lấy bất kỳ tập Borel $E \subset \{h > -\infty\}$. Bởi vì $h \geq u$ trên Ω nên $h \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Dùng Mệnh đề 3.2.2 ta có $\int\limits_{\Omega}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} < \infty$. Theo Định lý 5.9 trong [56] tồn tại hàm $\widetilde{h} \in \mathcal{E}_m(\Omega), \widetilde{h} \geq h$ trên Ω sao cho

$$(dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\Omega \setminus E}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.10}$$

Vì $\widetilde{h} \geq h$ nên $\widetilde{h} \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Ta chứng minh

$$u \geq g + \widetilde{h},$$

trên Ω. Thật vậy, đặt

$$v = \max(u, g + \widetilde{h}) \geq u.$$

Ta chỉ cần chứng minh $v = u$ trên Ω. Ta có

$$\begin{aligned}
(dd^c(g + \widetilde{h}))^m \wedge \beta^{n-m} &\geq (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m} + (dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + 1_{\Omega \setminus E}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + 1_{\{h=-\infty\}}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\geq (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

$$(dd^c(g + \widetilde{h}))^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Dùng Mệnh đề 5.2 trong [56], ta được

$$(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.11}$$

Hơn nữa,

$$v = \max(u, g + \widetilde{h}) \leq \max(h, g + \widetilde{h}) \leq \max(\widetilde{h}, g + \widetilde{h}) \leq \widetilde{h}.$$

Lại dùng Mệnh đề 5.2 trong [56], ta có

$$1_{\{v=-\infty\}}(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_{\{\widetilde{h}=-\infty\}}(dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.12}$$

Nhưng $h \leq \widetilde{h}$ nên $\{\widetilde{h} = -\infty\} \subset \{h = -\infty\}$. Ta viết

$$\{h = -\infty\} = \{\widetilde{h} = -\infty\} \cup \big\{h = -\infty \cap \{\widetilde{h} > -\infty\}\big\}.$$

Do đó,

$$1_{\{h=-\infty\}}(dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{\widetilde{h}=-\infty\}}(dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Đến đây ta kết hợp với (3.10) ta được

$$\begin{aligned} 1_{\{\widetilde{h}=-\infty\}}(dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m} &= 1_{\{h=-\infty\}}(dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m} \\ &= 1_{\{h=-\infty\}} 1_{\Omega \setminus E}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &= 1_{\{h=-\infty\}}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.12) và (3.13) cho ta

$$\begin{aligned} 1_{\{v=-\infty\}}(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} &\geq 1_{\{h=-\infty\}}(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\geq 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

lại do $v \geq u$ nên $\{u > -\infty\} \subset \{v > -\infty\}$. Sử dụng (3.11) ta có

$$\begin{aligned} 1_{\{v>-\infty\}}(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} &\geq 1_{\{v>-\infty\}} 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\geq 1_{\{v>-\infty\} \cap \{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Từ (3.14) và (3.15) ta được

$$(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \geq (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.16}$$

Do $u \leq v$, theo Định lý 3.22 trong [32] ta có

$$\int_{\Omega} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\Omega} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} < \infty. \tag{3.17}$$

Từ (3.16) và (3.17) ta có

$$(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.18}$$

Do đó theo Nhận xét 5.4 trong [56] ta có $u = v$ trên Ω. vậy

$$u = v = \max(u, g + \widetilde{h}) \geq g + \widetilde{h},$$

trên Ω. Từ đây theo cách xác định của h ta có $\widetilde{h} \leq h$ vậy $\widetilde{h} = h$ trên Ω. Do đó ta được

$$(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c \widetilde{h})^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\Omega \setminus E} (dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.19}$$

Vì thế,

$$\int_{E} (dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} = 0,$$

đúng với mọi tập Borel $E \subset \{h > -\infty\}$. Như vậy ta được

$$\int_{\{h > -\infty\}} (dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} = 0,$$

Do đó,

$$(dd^c h)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u = -\infty\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh Định lý 3.2.1.

Chứng minh. Để chứng minh Định lý 3.2.1 trên ta chia thành hai bước sau:
Bước 1. Trước hết ta chứng minh rằng tồn tại $v \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho $v \leq u$ trên Ω và

$$\int_{\widetilde{\Omega}} H_m(v) \leq \int_{\Omega} H_m(u).$$

Từ cách xác định lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ như trong [32], tồn tại $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$, $u_j \searrow u$ trên Ω và

$$\alpha = \sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < \infty.$$

Cố định $j \geq 1$. Từ $u_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ nên độ đo $\mu_j = 1_\Omega (dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}$ là độ đo Borel không âm trên $\widetilde{\Omega}$, hữu hạn và triệt tiêu trên các tập m- cực của $\widetilde{\Omega}$, ở đây 1_Ω kí hiệu là hàm đặc trưng của Ω. Theo Định lý 1.2 trong [32] tồn tại duy nhất hàm $g_j \in \mathcal{F}_m^a(\widetilde{\Omega})$ sao cho

$$H_m(g_j) = 1_\Omega H_m(u_j),$$

như là độ đo trên $\widetilde{\Omega}$ và $g_j \leq u_j$ trên Ω. Theo Định lý 5.3 trong [32] tồn tại $\psi_j \in \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$, $0 \leq f_j \in \mathrm{L}^1(\widetilde{\Omega}, H_m(\psi_j))$ sao cho

$$\mu_j = f_j H_m(\psi_j)$$

như là độ đo trên $\widetilde{\Omega}$. Lấy $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$ là dãy tăng vét cạn compact tương đối các miền m- siêu lồi, $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1} \Subset \Omega$, $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$. Với mỗi $k \geq 1$, đặt

$$\mu_{j,k} = 1_{\Omega_k} \min\{k, f_j\} H_m(\psi_j)$$

là độ đo Borel trên $\widetilde{\Omega}$. Khi đó tồn tại hàm $u_{j,k} \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ sao cho

$$H_m(u_{j,k}) = 1_{\Omega_k} \min\{k, f_j\} H_m(\psi_j)$$

trên Ω và $g_{j,k} \in \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$ sao cho

$$H_m(g_{j,k}) = 1_{\Omega_k} \min\{k, f_j\} H_m(\psi_j)$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} 1_{\Omega_k} \min\{k, f_j\} H_m(\psi_j) &\leq k(dd^c \psi_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\leq (dd^c \sqrt[m]{k}\psi_j)^m \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned}$$

Do đó theo Bổ đề 5.1 trong [32] tồn tại $g_{j,k}$ thỏa mãn đẳng thức trên. Để chứng minh tồn tại $u_{j,k}$ ta sử dụng lý luận như sau: với mỗi k xét hàm

$$\widetilde{\psi}_{j,k} = \sup\{\varphi \in SH_m^-(\Omega) : \varphi \leq \psi_j \ \text{ trên } \ \Omega_k\}.$$

Khi đó $\psi_j \leq \widetilde{\psi}_{j,k}$ trên Ω, và $\widetilde{\psi}_{j,k} = \psi_j$ trên Ω_k. Nhưng $\widetilde{\psi}_{j,k} \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ bởi vì $\widetilde{\psi}_{j,k} \geq \|\psi_j\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega_k)} h_{m,\Omega_k}$ ở đây $\|\psi_j\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega_k)} = \sup\{|\psi_j(z)| : z \in \Omega_k\}$ và h_{m,Ω_k} là hàm m- điều hòa dưới cực trị tương đối của cặp (Ω_k, Ω). Lại theo Mệnh đề 2.17 trong [32] $h_{m,\Omega_k} \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Ta có

$$\begin{aligned} 1_{\Omega_k} \min\{k, f_j\} H_m(\psi_j) = 1_{\Omega_k} \min\{k, f_j\} H_m(\widetilde{\psi}_{j,k}) &\leq k H_m(\widetilde{\psi}_{j,k}) \\ &\leq (dd^c \sqrt[m]{k} \widetilde{\psi}_{j,k})^m \wedge \beta^{n-m}, \end{aligned}$$

và sử dụng Bổ đề 5.1 trong [32] tồn tại $u_{j,k}$ như trong phần phát biểu trên. Theo Hệ quả 1.15 trong [33] ta được $\{u_{j,k}\}_k$ và $\{g_{j,k}\}_k$ lần lượt là các dãy giảm của hàm m- điều hòa dưới trong các lớp $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ và $\mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$. Mặt khác, nếu $\xi \in \partial\Omega$, thì ta có

$$\liminf_{\Omega \ni z \to \xi} (u_{j,k}(z) - g_{j,k}(z)) = -g_{j,k}(\xi) \geq 0$$

và

$$H_m(u_{j,k}) \leq H_m(g_{j,k})$$

trên Ω. Một lần nữa sử dụng Hệ quả 1.15 trong [33] ta được

$$g_{j,k} \leq u_{j,k},$$

trên Ω với mọi $j, k \geq 1$. Giả sử $g_{j,k} \searrow h_j$ khi $k \to \infty$ trong $\widetilde{\Omega}$. Khi đó $h_j \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sup_k \int_{\widetilde{\Omega}} H_m(g_{j,k}) \leq \int_{\widetilde{\Omega}} f_j 1_\Omega H_m(\psi_j) &= \int_\Omega f_j H_m(\psi_j) \\ &\leq \int_{\widetilde{\Omega}} f_j (dd^c \psi_j)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega d\mu_j < \infty, \end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$H_m(h_j) = f_j 1_\Omega H_m(\psi_j) = 1_\Omega \mu_j = 1_\Omega H_m(u_j) = H_m(g_j),$$

nên theo Định lý 1.2 trong [32] ta được $h_j = g_j$ trên $\widetilde{\Omega}$. Tương tự, $u_{j,k} \searrow u_j$

khi $k \to \infty$ trên Ω. Với mỗi $j \geq 1$, đặt

$$\widetilde{g}_j = [\sup_{k \geq j} g_k]^*.$$

Khi đó $\widetilde{g}_j \in SH_m^-(\widetilde{\Omega})$, và từ $\widetilde{g}_j \geq g_j$ thì theo Định lý 3.9 trong [32] ta được $\widetilde{g}_j \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$. Ta dễ thấy $\{\widetilde{g}_j\}$ là dãy giảm. Ta sẽ chứng minh

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (dd^c \widetilde{g}_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\Omega} (dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.20}$$

Lấy $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$. Theo Định lý 3.16 trong [32] ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi)(dd^c \widetilde{g}_j)^m \wedge \beta^{n-m} &\leq \int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi)(dd^c g_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi) 1_{\Omega} (dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_{\Omega} (-\psi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

cho $\psi \searrow -1$ ta có (3.20). Từ $k \geq j$ ta có $g_k \leq u_k \leq u_j$ trên Ω. Do đó

$$\widetilde{g}_j = [\sup_{k \geq j} g_k]^* \leq u_j$$

trên Ω. Đặt $v = \lim_j \widetilde{g}_j$.

Ta chứng minh $v \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$. Thật vậy, ta có $v \in \mathrm{S}H_m^-(\Omega)$. Theo Định lý 3.1 trong [32] tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$ sao cho $\varphi_j \searrow v$ trên $\widetilde{\Omega}$. Bằng cách thay φ_j bởi $v_j = \max\{\varphi_j, \widetilde{g}_j\} \in \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$ và $v_j \searrow v$ ta có thể giả sử $\varphi_j \geq \widetilde{g}_j$ trên $\widetilde{\Omega}$. Khi đó theo Định lý 1.4 trong [33] ta có

$$\int_{\widetilde{\Omega}} H_m(\varphi_j) \leq \int_{\widetilde{\Omega}} H_m(\widetilde{g}_j) \leq \int_{\Omega} H_m(u_j) \leq \alpha < \infty.$$

Do đó

$$\sup_j \int_{\widetilde{\Omega}} H_m(\varphi_j) < \infty,$$

và vậy thì $v \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$. Lại có $\widetilde{g}_j \leq u_j$ trên Ω nên $v \leq u$ trên Ω.
Tiếp theo ta chứng minh

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\Omega} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.21}$$

Bởi mệnh đề 3.2.3, nếu $\psi \in SH_m^-(\Omega)$ thì ta có:

$$\int_{\Omega} (-\psi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\Omega} (-\psi)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.22}$$

Mặt khác, theo lý luận ở trên tồn tại $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega}), \varphi_j \geq \widetilde{g}_j$ và $\varphi_j \searrow v$ trên $\widetilde{\Omega}$. Lấy $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega}) \cap C(\widetilde{\Omega})$. Theo định lý 3.16 trong [32] ta có

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi)(dd^c \varphi_j)^m \wedge \beta^{n-m} &\leq \int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi)(dd^c \widetilde{g}_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\leq \int_{\Omega} (-\psi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Sử dụng (3.23), Mệnh đề 3.2.3 và (3.22) ta được

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi)(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} &= \overline{\lim_j} \int_{\widetilde{\Omega}} (-\psi)(dd^c \varphi_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\leq \overline{\lim_j} \int_{\Omega} (-\psi)(dd^c \widetilde{g}_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\leq \overline{\lim_j} \int_{\Omega} (-\psi)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\Omega} (-\psi)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \end{aligned}$$

cho $\psi \searrow -1$ ta được (3.21) và bước 1 được chứng minh.
Bước 2. Bây giờ ta chứng minh tồn tại $w \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$, $w \leq u$ trên Ω và

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_{\Omega} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Thật vậy, theo chứng minh ở Bước 1 thì tồn tại hàm $v \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho

$v \leq u$ trên Ω và

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Đặt

$$u_1 = \sup\{\varphi \in SH_m^-(\widetilde{\Omega}) : \varphi \leq u \ \text{ trên } \Omega\}.$$

Khi đó $v \leq u_1 \leq 0$ trên $\widetilde{\Omega}$. Do đó $u_1 \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ và $u_1 \leq u$ trên Ω. Theo Mệnh đề 5.2 trong [56], ta có

$$1_{\{u_1=-\infty\}}(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_\Omega 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.24}$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Mặt khác bằng cách lập luận như trong chứng minh Bổ đề 4.3, 4.4 và 4.5 trong [46] cho trường hợp của hàm m-điều hòa dưới ta được

$$(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} \leq 1_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.25}$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Bởi vì $\{u = -\infty\} \subset \{u_1 = -\infty\} \cap \Omega$ thì từ (3.25), ta có

$$1_{\{u_1=-\infty\}}(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} \leq 1_\Omega 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.26}$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Từ (3.24) và (3.26), ta có

$$1_{\{u_1=-\infty\}}(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} = 1_\Omega 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.27}$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Đặt $\mu = 1_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mu &= 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + 1_{\Omega\cap\{u=-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &= 1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + 1_{\{u_1=-\infty\}}(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m}.\end{aligned}$$

Bởi Bổ đề 3.2.4, tồn tại $g_1 \in \mathcal{F}_m^a(\widetilde{\Omega})$, $h_1 \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$ sao cho

$$h_1 + g_1 \leq u_1 \leq h_1,$$

trên $\widetilde{\Omega}$ và

$$\begin{aligned}(dd^c h_1)^m \wedge \beta^{n-m} &= 1_{\{u_1=-\infty\}}(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m}, \\ (dd^c g_1)^m \wedge \beta^{n-m} &= 1_{\{u_1>-\infty\}}(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m}.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo Định lý 1.2 trong [32] tồn tại $g \in \mathcal{F}_m^a(\widetilde{\Omega})$ sao cho

$$1_{\Omega\cap\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m},$$

trên $\widetilde{\Omega}$. Do đó, ta có thể biểu diễn

$$\mu = (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m} + (dd^c h_1)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.28}$$

ở đó $g \in \mathcal{F}_m^a(\widetilde{\Omega})$ và $h_1 \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$. Đặt

$$w = \sup\{\varphi \in \mathcal{E}_m(\widetilde{\Omega}) : (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} \geq (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m}, \varphi \leq h_1\}.$$

Khi đó như trong chứng minh Định lý 5.9 trong [56], ta có

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c g)^m \wedge \beta^{n-m} + (dd^c h_1)^m \wedge \beta^{n-m} = \mu, \tag{3.29}$$

và $g + h_1 \leq w \leq h_1$ trên $\widetilde{\Omega}$. Do $g + h_1 \leq w$ nên $w \in \mathcal{F}_m(\widetilde{\Omega})$. Bây giờ ta chứng minh $w \leq u$ trên Ω. Đặt

$$v_1 = \max(w, u) \in \mathcal{F}_m(\Omega).$$

Khi đó $v_1 \geq u$ trên Ω. Ta sẽ chứng minh $v_1 = u$ và do đó, định lý được chứng minh.

Thật vậy, do $v_1 \geq u$ nên theo Định lý 3.22 trong [32] ta được

$$\int_\Omega (dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_\Omega (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} < \infty. \tag{3.30}$$

Mặt khác ta có

$$(dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} = \mu \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.31}$$

Từ (3.31) kết hợp với Mệnh đề 5.2 trong [56] ta có

$$(dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.32}$$

Nhưng $v_1 = \max(w, u)$ nên $v_1 + g_1 = \max(w + g_1, u + g_1) \leq \max(h_1 + g_1, u) \leq \max(u_1, u) \leq u$ trên Ω. Do đó, với mọi tập m - cực $E \subset \Omega$ ta có

$$\int_E (dd^c(v_1 + g_1))^m \wedge \beta^{n-m} \geq \int_E (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.33}$$

(đánh giá (3.33) có được nhờ áp dụng Bổ đề 4.1 trong [5] vẫn đúng cho lớp $\mathcal{E}_m(\Omega)$, hoặc Mệnh đề 5.2 trong [56]). Do $(dd^c g_1)^m \wedge \beta^{n-m}$ triệt tiêu trên các tập m - cực của Ω, sử dụng Bổ đề 5.6 trong [56], ta được

$$\int_E (dd^c(v_1 + g_1))^m \wedge \beta^{n-m} = \int_E (dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.34}$$

đúng với mọi tập m - cực $E \subset \Omega$. Kết hợp (3.33) và (3.34) suy ra

$$\int_E (dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m} \geq \int_E (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m},$$

đúng với mọi tập m - cực $E \subset \Omega$. Vậy,

$$(dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 1_{\{u=-\infty\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \tag{3.35}$$

trên Ω. Từ (3.32) và (3.35) suy ra

$$(dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m} \geq (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.36}$$

Kết hợp (3.36) và (3.30) ta được

$$(dd^c v_1)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.37}$$

Từ (3.37) và Nhận xét 5.4 trong [56] ta có $v_1 = u$ trên Ω. Định lý 3.2.1 được chứng minh. □

Từ định lý trên, chúng tôi thu được một hệ quả sau.

Hệ quả 3.2.5. *Cho $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ là những miền m- siêu lồi bị chặn và $\{u_j\}_{j\geq 1}, u \subset \mathcal{F}_m(\Omega)$ sao cho $u_j \geq u$, u_j hội tụ trong C_m- dung lượng tới u trên Ω. Giả sử $\widetilde{u}_j, \widetilde{u}$ theo thứ tự lần lượt là dưới thác triển của u_j, u trên $\widetilde{\Omega}$. Khi đó $H_m(\widetilde{u}_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(\widetilde{u})$ trên $\widetilde{\Omega}$.*

Chứng minh. Theo Định lý 3.8 trong [56] ta có nếu $h \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ thì

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega h(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega h(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{3.38}$$

Bây giờ lấy $\chi \in C_0^\infty(\widetilde{\Omega})$. Như Bổ đề 3.10 trong [32] ta viết $\chi = \varphi_1 - \varphi_2$ trong đó $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}_m^0(\widetilde{\Omega})$. Sử dụng Định lý 3.2.1 và (3.38) ta có

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_{\widetilde{\Omega}} \chi(dd^c\widetilde{u}_j)^m \wedge \beta^{n-m} &= \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega} \varphi_1(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} - \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega} \varphi_2(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}\\ &= \int_{\Omega} \varphi_1(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} - \int_{\Omega} \varphi_2(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}\\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} \chi(dd^c\widetilde{u})^m \wedge \beta^{n-m},\end{aligned}$$

Suy ra $H_m(\widetilde{u}_j)$ hội tụ yếu tới $H_m(\widetilde{u})$ trên $\widetilde{\Omega}$. Ta được điều cần chứng minh. □

Kết luận chương 3

• Chứng minh sự tồn tại dưới thác triển các hàm m- điều hòa dưới thuộc lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với Ω là miền m-siêu lồi bị trặn trong $\mathbb{C}^n$.

• Chứng tỏ được trong lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ độ đo Hessian phức của hàm dưới thác triển và hàm đã cho là không thay đổi.

• Áp dụng kết quả đạt được chỉ ra sự hội tụ yếu theo theo độ đo Hessian phức, hệ quả **3.2.5.**

Chương 4

Phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ

Như đã trình bày trong Phần mở đầu. Mục đích của chương nay là chúng tôi trình bày sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu Monge – Ampère cho các độ đo bất kỳ, đặc biệt là độ đo mang bởi tập đa cực.

Chương 4 gồm hai phần. Trong phần đầu, chúng tôi giới thiệu về phương trình kiểu Monge–Ampère và hướng chứng chứng minh kết quả chính của chương. Trong phần hai, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình kiểu kiểu Monge–Ampère trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ cho một độ đo bất kỳ.

Chương 4 được viết dựa trên bài báo [3] (trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án).

4.1 Giới thiệu

Để thuận lợi cho việc trình bày, chúng tôi xin nhắc lại khái niệm phương trình kiểu Monge-Ampère đã được đưa ra bởi Bedford, Taylor.

Định nghĩa 4.1.1. *Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và μ là độ đo Borel dương trên Ω. Giả sử $F : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ là $dt \times d\mu$ - hàm đo được.*

Khi đó phương trình dạng

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu, \tag{4.1}$$

trong đó u là một hàm đa điều hòa dưới trên Ω*, được gọi là phương trình kiểu Monge–Ampère.*

Bedford và Taylor trong [7] đã chứng minh tồn tại nghiệm của phương trình (4.1) trong trường hợp μ là độ đo Lebesgue, và $F^{\frac{1}{n}} \geq 0$ là bị chặn, liên tục, lồi, tăng theo biết thứ nhất. Sau đó trong [19], Cegrell đã chứng tỏ rằng có thể bỏ qua giả thiết lồi và đơn điệu. Trong trường hợp F trơn sự tồn tại ngiệm của (4.1) đã được chứng minh trong [18]. Trong [52], Kołodziej đã chứng minh tồn tại và duy nhất $u \in PSH \cap L^\infty(\Omega)$ là nghiệm của phương trình (4.1) khi F là bị chặn, không âm, tăng và liên tục theo biết thứ nhất còn μ là độ đo Monge-Ampère của một hàm đa điều hòa dưới bị chặn và Ω là miền giả lồi chặt. Thiết lập sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (4.1) trên các lớp của Cegrell, đặc biệt là lớp $\mathcal{F}(\Omega)$, trong [29], đã chứng minh nếu μ triệt tiêu trên các tập đa cực và $\mu(\Omega) < +\infty$, $0 \leq F(t, z) \leq g(z)$ với $g \in L^1(d\mu)$ thì với mọi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$, phương trình (4.1) có nghiệm $u \in \mathcal{F}^a(\Omega, f)$.

Sau đó trong [35] Czyż nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình (4.1) trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ lớp rộng hơn lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$. Czyż đã chứng minh rằng: nếu μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω, F là hàm liên tục đối với biến thứ nhất và bị chặn bởi hàm khả tích $g \in L^1(d\mu)$, $0 \leq F(t, z) \leq g(z)$ và $\mu = (dd^c w)^n, w \in \mathcal{N}(\Omega)$ thì phương trình (4.1) giải được trong lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$. Gần đây năm 2014, vẫn với giả thiết μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và tồn tại dưới nghiệm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ của (4.1), tức là tồn tại hàm $v_0 \in \mathcal{N}^a(\Omega)$ sao cho $(dd^c v_0)^n \geq F(v_0, .)d\mu$, Benelkourchi trong [12] đã chứng minh được rằng phương trình (4.1) có nghiệm $u \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$.

Mục đính của chương nay chúng tôi chứng minh sự tồi tại nghiệm yếu của phương trình (4.1) trên lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ nhưng μ có thể triệt tiêu trên các tập đa cực. Khi giải quyết bài toán trên chúng tôi gặp khó khăn là khi μ mang

tập đa cực thì giải quyết như thế nào. Để giải quyết khó khăn đó trước tiên chúng tôi tìm nghiệm yếu của phần mang tập đa cực đó. Sau đó chúng tôi xây dựng một bao kiểu Perron - Bremerman các hàm đa điều hòa dưới khác với các tác giả khác để tiết tục giải phần còn lại. Chi tiết hơn bây giờ ta đi chứng minh kết quả chính của chương.

4.2 Phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ

Bây giờ chúng tôi chứng minh kết quả chính của chương. Cụ thể chúng tôi đạt được kết quả sau:

Định lý 4.2.1. *Giả sử Ω là miền siêu lồi bị chặn và μ là độ đo không âm trên Ω. Giả sử $F : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ là $dt \times d\mu$- hàm đo được thỏa mãn:*

(1) Với mọi $z \in \Omega$, hàm $t \longmapsto F(t, z)$ là hàm liên tục không giảm;

(2) Với mọi $t \in \mathbb{R}$, hàm $z \longmapsto F(t, z)$ thuộc $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$;

(3) Tồn tại hàm $w \in \mathcal{N}(\Omega)$ sao cho $(dd^c w)^n \geq F(w, .)d\mu$.

Khi đó với mỗi $f \in MPSH(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$, tồn tại $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho $u \geq w$ và $(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu$ trên Ω.

Trong phần này chúng ta tiếp tục sử dụng các lớp Cegrell $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega)$ và $\mathcal{F}^a(\Omega)$ trong trường hợp Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ đã được giới thiệu và định nghĩa ở phần Tổng quan (Định nghĩa 1) và hàm đa điều hòa dưới cực đại($MPSH(\Omega)$), tập các hàm đa điều hòa dưới cực đại âm $MPSH^-(\Omega)$ (định nghĩa 1.1.4) trong chương 1. Trong chương 1 ta cũng đã giới thiệu lớp $\mathcal{N}(\Omega)$ (định nghĩa 1.1.6) và lớp các hàm đa điều hòa dưới với giá trị biên, các lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$, $\mathcal{E}(\Omega, f)$ và $\mathcal{N}^a(\Omega, f)$ (định nghĩa 1.1.11). Trong toàn bộ chương này ta luôn giải thiết $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$. Để chứng minh Định lý 4.2.1 trên ta cần bổ đề quan trọng sau.

Bổ đề 4.2.2. *Cho Ω, μ, F và w thỏa mãn giả thiết của định lý 4.2.1. Giả sử $w \in \mathcal{N}^a(\Omega)$, $suppd\mu \Subset \Omega$, $d\mu(\Omega) < \infty$ và $d\mu$ triệt tiêu trên các tập đa cực*

của Ω. *Nếu* $f \in \mathcal{E}(\Omega) \cap MPSH(\Omega)$ *và* $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ *sao cho* $supp(dd^c v)^n \Subset \Omega$ *và* $(dd^c v)^n$ *mang bởi một tập đa cực* Ω. *Khi đó hàm*

$$u := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v \text{ và } (dd^c\varphi)^n \geq F(\varphi, .)d\mu\})^*.$$

thuộc $\mathcal{N}(\Omega, f)$ *và* $(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n$ *trong* Ω.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ và

$$(dd^c u)^n \geq F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n,$$

trên Ω. Ta có $w + v \in \mathcal{E}(\Omega)$ và $w + v \leq v$ trên Ω. Nhưng

$$(dd^c(w + v))^n \geq (dd^c w)^n \geq F(w, .)d\mu \geq F(w + v, .)d\mu,$$

nên theo định nghĩa của hàm u ta có $w+v \leq u \leq f$ trên Ω. Do đó $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Bây giờ ta chứng minh:

$$(dd^c u)^n \geq F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n \text{ trong } \Omega. \tag{4.2}$$

Thật vậy, dùng Bổ đề Choquet tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $\varphi_j \leq v$ trên Ω, $(dd^c\varphi_j)^n \geq F(\varphi_j, .)d\mu$ và

$$u = \left(\sup_{j\geq 1} \varphi_j\right)^*.$$

Theo Mệnh đề 1.1.12 trong chương 2, ta có thể thay φ_j bằng $\max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}$. Do đó ta có thể giả sử $\varphi_j \nearrow u$ hầu khắp nơi (h.k.n) trong Ω và

$$(dd^c\varphi_j)^n \geq F(\varphi_j, .)d\mu,$$

vơi mọi $j \geq 1$. Vậy thì $\varphi_j \longrightarrow u$ trong C_n - dung lượng và theo [24], $(dd^c\varphi_j)^n \longrightarrow (dd^c u)^n$ yếu. Mặt khác bởi vì μ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω và $\varphi_j \longrightarrow u$ yếu nên theo Bổ đề 2.1 trong [22] ta được $\varphi_j \longrightarrow u$ $d\mu$ h.k.n. Do đó, từ

$$(dd^c\varphi_j)^n \geq F(\varphi_j, .)d\mu,$$

ta được

$$(dd^c u)^n \geq F(u, .)d\mu.$$

Mặt khác, từ $u \leq v$ trên Ω nên theo Bổ đề 4.1 trong [5], ta được

$$1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n \geq 1_{\{v=-\infty\}}(dd^c v)^n = (dd^c v)^n.$$

Do vậy,

$$(dd^c u)^n = 1_{\{u>-\infty\}}(dd^c u)^n + 1_{\{u=-\infty\}}(dd^c u)^n \geq F(u,.)d\mu + (dd^c v)^n,$$

và (4.2) được chứng minh.
Bước tiếp theo, chúng ta chứng minh:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[F(u,.)d\mu + (dd^c v)^n\Big] \leq \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n \leq \int\limits_{\Omega} \Big[F(u,.)d\mu + (dd^c v)^n\Big] < \infty,$$

Mặt khác, bởi vì $v \in \mathcal{F}(\Omega, f)$ nên tồn tại $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho

$$\varphi + f \leq v \leq f,$$

trên Ω. Lấy $\varphi_j \in \mathcal{E}_0(\Omega), \varphi_j \searrow \varphi$ trên Ω. Đặt

$$v_j = \max(\varphi_j + f, v).$$

Khi đó $v_j \in \mathcal{E}_0(\Omega, f)$ và $v_j \searrow \max(\varphi + f, v) = v$ trên Ω. Ta có $(dd^c v_j)^n \longrightarrow (dd^c v)^n$ yếu, khi $j \nearrow \infty$ trên Ω. Bởi vì $\mathrm{supp}(dd^c v)^n \Subset G \Subset \Omega$ bởi vậy không mất tính tổng quát ta giả sử $\mathrm{supp}(dd^c v_j)^n \Subset G$. Ta chứng minh tồn tại $w_j \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ sao cho $v_j \geq w_j$ và

$$(dd^c w_j)^n = F(w_j,.)\Big[d\mu + \frac{1}{F(v_j,.)}(dd^c v_j)^n\Big].$$

Trước hết, ta thấy $w + v_j \in \mathcal{E}^a(\Omega)$. Thật vậy, lấy $A \subset \Omega$ là một tập đa cực. Từ $\varphi_j + f \leq v_j$ và theo Bổ đề 4.1 trong [5] ta có

$$\int\limits_A (dd^c v_j)^n \leq \int\limits_A (dd^c(\varphi_j + f))^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \int\limits_A (dd^c \varphi_j)^l \wedge (dd^c f)^{n-l}.$$

Tuy nhiên, do Bổ đề 4.4 trong [5] ta có

$$\int\limits_A (dd^c \varphi_j)^l \wedge (dd^c f)^{n-l} \leq \Big(\int\limits_A (dd^c \varphi_j)^n\Big)^{\frac{l}{n}} \Big(\int\limits_A (dd^c f)^n\Big)^{\frac{n-l}{n}} = 0.$$

Do đó, $(dd^c v_j)^n$ triệt tiêu trên tất cả các tập đa cực của Ω. Ngoài ra với giả thiết A là tập đa cực của Ω nên theo Bổ đề 4.4 trong [5] ta có:

$$\begin{aligned}\int_A (dd^c(w+v_j))^n &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \int_A (dd^c w)^l \wedge (dd^c v_j)^{n-l} \\ &\leq \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \Big(\int_A (dd^c w)^n\Big)^{\frac{l}{n}} \Big(\int_A (dd^c v_j)^n\Big)^{\frac{n-l}{n}} = 0.\end{aligned}$$

Vậy $w + v_j \in \mathcal{E}^a(\Omega)$. Tiếp theo, do [21] ta có thể tìm $\psi_j \in \mathcal{F}(\Omega)$ sao cho $\psi_j \geq w + v_j$ trên Ω và $\psi_j = w + v_j$ trong lân cận mở compact tương đối $U \Subset \Omega$ của supp$d\mu \cup G$. Ta lại sử dụng Bổ đề 4.4 trong [5], với tập đa cực $A \subset \Omega$, ta có

$$\int_A (dd^c \psi_j)^n \leq \int_A (dd^c(w+v_j))^n = 0 \Rightarrow \psi_j \in \mathcal{F}^a(\Omega)$$

Từ

$$\begin{aligned}(dd^c\psi_j)^n &\geq 1_U (dd^c w)^n + 1_U (dd^c v_j)^n \\ &\geq F(w,.) 1_U d\mu + 1_U (dd^c v_j)^n \\ &\geq F(\psi_j,.)[d\mu + \frac{1}{F(v_j,.)}(dd^c v_j)^n]\end{aligned}$$

bởi [12] tồn tại $w_j \in \mathcal{N}^a(\Omega, f)$ sao cho

$$(dd^c w_j)^n = F(w_j,.)\Big[d\mu + \frac{1}{F(v_j,.)}(dd^c v_j)^n\Big].$$

Bởi vì

$$\frac{(dd^c w_j)^n}{F(w_j,.)} \geq \frac{(dd^c v_j)^n}{F(v_j,.)},$$

nên theo Định lý 4.8 trong [42] ta được $v_j \geq w_j$ trong Ω ta có điều cần chứng minh. Đặt

$$u_j := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega) : \varphi \leq v_j \text{ và } (dd^c\varphi)^n \geq F(\varphi,.)d\mu\})^*.$$

Do $v \leq v_j$ trên Ω nên ta có $u \leq u_j \leq f$ trên Ω. Do đó $u_j \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Như ở trên ta thấy $(dd^c u_j)^n \geq F(u_j, .)d\mu$ và $u_j \searrow u$ khi $j \nearrow \infty$. Vậy, từ $w_j \leq u_j \leq v_j$ và Hệ quả 3.4 trong [5] và giả thiết (2) của định lý 4.2.1 ta được:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \Big[F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n\Big] &\leq \int\limits_{\Omega} (dd^c u)^n = \lim_j \int\limits_{\Omega} (dd^c u_j)^n \\
&\leq \limsup_j \int\limits_{\Omega} (dd^c w_j)^n \\
&= \limsup_j \int_{\Omega} F(w_j, .)\Big[d\mu + \frac{1}{F(v_j, .)}(dd^c v_j)^n\Big] \\
&\leq \limsup_j \int\limits_{\Omega} \Big[F(u_j, .)d\mu + (dd^c v_j)^n\Big] \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \Big[F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n\Big] \\
&\leq \int_U [F(0, .)d\mu + (dd^c v)^n] < \infty.
\end{aligned}$$

Bởi vậy ta có

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu + (dd^c v)^n,$$

trong Ω. Bổ đề 4.2.2 được chứng minh. □

Chứng minh định lý 4.2.1. Trước hết ta nhận xét rằng từ giả thiết của Định lý 4.2.1 ta thấy họ hàm $F(t, z), -\infty < t < +\infty, z \in \Omega$, khi $t \searrow -\infty$, là các hàm đo được giảm trên Ω, $F(t, z) \geq 0$ với $(t, z) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Do đó, tồn tại $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t, z), z \in \Omega$. Đặt $F(-\infty, z) = \lim\limits_{t \to -\infty} F(t, z), z \in \Omega$. Đây là hàm đo được và thuộc $L^1_{loc}(\Omega, \mu)$.

Chúng ta sẽ chứng minh Định lý 4.2.1 nhờ các bước sau.

Bước 1. Ta chứng minh tồn tại $v_0 \in \mathcal{E}(\Omega), v_0 \geq w$ trên Ω và

$$(dd^c v_0)^n = 1_{\{w=-\infty\}} F(w, .)d\mu,$$

trên Ω. Thật vậy, từ $(dd^c w)^n \geq F(w,.)d\mu \geq 1_{\{w=-\infty\}}F(w,.)d\mu$ theo Định lý 4.14 trong [5] thì tồn tại $v_0 \in \mathcal{E}(\Omega)$ sao cho $v_0 \geq w$ trên Ω và

$$(dd^c v_0)^n = 1_{\{w=-\infty\}}F(w,.)d\mu.$$

Bước 2. Lấy dãy tăng các miền siêu lồi $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ với $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Theo bổ đề 4.2.2 ta sẽ chứng minh tồn tại dãy giảm $u_j \in \mathcal{N}(\Omega_j, f)$ với

$$(dd^c u_j)^n = F(u_j,.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu + F(w,.)1_{\{w=-\infty\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu.$$

Theo [16], ta có thể giả sử $v_0 \in \mathcal{E}(\Omega_j)$ với mọi $j \geq 1$. Từ Mệnh đề 2.1 trong [43] tồn tại dãy giảm $h_j \in \mathcal{F}(\Omega_j), j \geq 2$, sao cho $h_j \geq v_0$ trong Ω_j và $(dd^c h_j)^n = 1_{\Omega_{j-1}}(dd^c v_0)^n$. Đặt

$$v_j := (\sup\{\varphi \in PSH^-(\Omega_j) : \varphi \leq \min(f, h_j) \ \text{ trên } \ \Omega_j\})^*.$$

ta có $h_j + f \leq v_j \leq f$ trên Ω_j nên $v_j \in \mathcal{F}(\Omega_j, f)$ và từ $w \leq v_0$ trên Ω suy ra $w \leq v_{j+1} \leq v_j$ trong Ω_j. Theo Mệnh đề 2.2 trong [44] ta có

$$1_{\{v_j>-\infty\}}(dd^c v_j)^n \leq (dd^c f)^n + (dd^c h_j)^n = (dd^c h_j)^n$$

trên Ω_j. Ở đây ta chú ý vì $(dd^c v_0)^n$ mang bởi một tập đa cực nên $(dd^c h_j)^n$ cũng mang bởi một tập đa cực. Theo Định lý 5.11 trong [21] ta có $(dd^c h_j)^n = 1_{\{h_j=-\infty\}}(dd^c h_j)^n$ theo đó $1_{\{h_j>-\infty\}}(dd^c h_j)^n = 0$. Nhưng $v_j \leq h_j$ trong Ω_j nên $\{-\infty < v_j\} \subset \{-\infty < h_j\}$. Do đó ta có

$$1_{\{v_j>-\infty\}}(dd^c v_j)^n \leq 1_{\{v_j>-\infty\}}(dd^c h_j)^n \leq 1_{\{h_j>-\infty\}}(dd^c h_j)^n = 0$$

trong Ω_j.

Vậy

$$1_{\{v_j>-\infty\}}(dd^c v_j)^n = 0,$$

trong Ω_j. Từ $h_j + f \leq v_j \leq h_j$ trong Ω_j nên theo Bổ đề 4.1 và Bổ đề 4.12

trong [5], ta có

$$\begin{aligned}(dd^c h_j)^n &= 1_{\{h_j=-\infty\}}(dd^c h_j)^n \le 1_{\{v_j=-\infty\}}(dd^c v_j)^n \\ &\le 1_{\{h_j+f=-\infty\}}(dd^c(h_j+f))^n \\ &= 1_{\{h_j=-\infty\}}(dd^c h_j)^n = (dd^c h_j)^n.\end{aligned}$$

trong Ω_j. Vậy

$$1_{\{v_j=-\infty\}}(dd^c v_j)^n = (dd^c h_j)^n$$

trong Ω_j. Do đó

$$\begin{aligned}(dd^c v_j)^n &= 1_{\{v_j>-\infty\}}(dd^c v_j)^n + 1_{\{v_j=-\infty\}}(dd^c v_j)^n = (dd^c h_j)^n \\ &= 1_{\Omega_{j-1}}(dd^c v_0)^n = 1_{\{w=-\infty\}\cap\Omega_{j-1}} F(w,.)d\mu\end{aligned}$$

trong Ω_j. Với mỗi $j \ge 2$, đặt

$u_j := (\sup\{\varphi \in \mathcal{E}(\Omega_j) : \varphi \le v_j \text{ và } (dd^c\varphi)^n \ge F(\varphi,.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu \text{ trên } \Omega_j\})^*$.

Ta thấy $w \le u_{j+1} \le u_j \le f$ trong Ω_j. Ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}F(\max(w,-j),.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu &= F(w,.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu \\ &\le 1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}(dd^c w)^n \\ &\le (dd^c\max(w,-j))^n.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ta thấy nếu đặt $d\tilde{\mu} = 1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu$ thì $\mathrm{supp}d\tilde{\mu} \Subset \Omega_j$, $d\tilde{\mu}(\Omega_j) < \infty$ và $d\tilde{\mu}$ triệt tiêu trên các tập đa cực của Ω_j. Tiếp theo để áp dụng Bổ đề 4.2.2 ta cần chỉ ra có hàm $g_j \in \mathcal{N}^a(\Omega), j \ge 2$ sao cho

$$F(g_j,.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu \le (dd^c g_j)^n,$$

trên Ω_j. Ta thấy $\max(w,-j) \in \mathcal{E}^a(\Omega_j)$. Bởi [21] ta có thể chọn $g_j \in \mathcal{F}(\Omega_j)$ thỏa mãn $g_j = \max(w,-j)$ trên Ω_{j-1} và $g_j \ge \max(w,-j)$ trên Ω_j. Theo Bổ đề 4.1 trong [5] ta có $g_j \in \mathcal{F}^a(\Omega_j)$. Do đó $g_j \in \mathcal{N}^a(\Omega_j)$. Từ (4.2) ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}F(g_j,.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu &= F(\max(w,-j),.)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}}d\mu \\ &\le (dd^c\max(w,-j))^n \le (dd^c g_j)^n,\end{aligned}$$

trên Ω_j. Bây giờ áp dụng Bổ đề 4.2.2 ta có $u_j \in \mathcal{N}(\Omega_j, f)$ và

$$(dd^c u_j)^n = F(u_j, .)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}} d\mu + F(w, .)1_{\{w=-\infty\}\cap\Omega_{j-1}} d\mu.$$

và đó là điều cần chứng minh.

Bước 3. Đặt $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$. Ta sẽ chứng minh $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$ và

$$(dd^c u)^n = F(u, .)d\mu.$$

Do $w \leq u \leq f$ trong Ω nên $u \in \mathcal{N}(\Omega, f)$. Lấy $j, k \in \mathbb{N}^*$ với $j > k \geq 2$. Từ $u_j \searrow u$ khi $j \longrightarrow \infty$, theo [24], $(dd^c u_j)^n$ hội tụ yếu đến $(dd^c u)^n$ trong Ω_k và cho $j \longrightarrow \infty$ ta có

$$F(u_j, .)1_{\{w>-j\}\cap\Omega_{j-1}} \searrow F(u, .)1_{\{w>-\infty\}}$$

trong Ω_k. Do đó ta có

$$(dd^c u)^n = F(u, .)1_{\{w>-\infty\}} d\mu + F(w, .)1_{\{w=-\infty\}} d\mu,$$

trong Ω_k. Cho $k \to \infty$ ta được

$$(dd^c u)^n = F(u, .)1_{\{w>-\infty\}} d\mu + F(w, .)1_{\{w=-\infty\}} d\mu, \tag{4.4}$$

trong Ω.

Mặt khác từ điều kiện $w \leq u$ trên Ω nên

$$F(w, .)1_{\{w=-\infty\}} d\mu = F(u, .)1_{\{u=-\infty\}} d\mu. \tag{4.5}$$

Kết hợp (4.4) và (4.5) ta có:

$$\begin{aligned}(dd^c u)^n &= F(u, .)1_{\{w>-\infty\}} d\mu + F(w, .)1_{\{w=-\infty\}} d\mu \\ &= F(u, .)1_{\{w>-\infty\}} d\mu + F(u, .)1_{\{w=-\infty\}} d\mu \\ &= F(u, .)d\mu.\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Kết luận chương 4: Thông qua việc chứng minh được Định lý 4.2.1 thì nội dung chủ yếu của chương 4 là,

• Chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu thuộc lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ cho phương trình kiểu Monge–Ampère cho một độ đo bất kỳ, đặc biệt độ đo mang bởi một tập đa cực.

Kết luận và kiến nghị

I. Kết luận

Luận án đã đạt được các mục đích nghiên cứu đề ra. Kết quả của Luận án góp phần làm phong phú thêm về dưới thác triển của các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn trong các lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$, $\mathcal{F}(\Omega, f)$, $\mathcal{F}_m(\Omega)$ với sự kiểm soát độ đo Monge-Ampère và độ đo Hessian phức.

1) Chứng minh được sự tồn tại dưới thác triển trong lớp $\mathcal{E}_\chi(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và chỉ ra đẳng thức $\chi(\widetilde{u})(dd^c\widetilde{u})^n = 1_\Omega\chi(u)(dd^c u)^n$ trên $\widetilde{\Omega}$.

2) Chứng minh được bài toán dưới thác triển cho lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ với Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ có lời giải và chỉ ra được đẳng thức về độ đo Monge-Ampère của hàm dưới thác triển và hàm đã cho.

3) Mở rộng kết của của Hed ([38]) cho bài toán xấp xỉ các hàm đa điều hòa dưới bằng dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên các miền rộng hơn trong lớp $\mathcal{F}(\Omega, f)$ cho trường hợp Ω là miền siêu lồi không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

4) Chứng tỏ sự tồn tại dưới thác triển và đẳng thức giữa độ đo Hessian phức cho lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$ các hàm m-điều hòa dưới.

5) Thiết lập được sự tồn tại nghiệm yếu thuộc lớp $\mathcal{N}(\Omega, f)$ của phương trình kiểu Monge-Ampère cho một độ đo bất kỳ.

II. Kiến nghị

Chúng tôi nghĩ rằng trong tương lai gần, việc tìm nghiệm liên tục Holder cho phương trình kiểu Monge-Ampère đối với toán tử Monge-Ampère và toán tử Hessian là một trong các bài toán cần quan tâm và tìm ra lời giải. Đặc biệt cần nghiên cứu bài toán này cho các đối tượng rộng hơn các miền trong $\mathbb{C}^n$, chẳng hạn như trên đa tạp Kahler Compact hay tổng quát hơn trên các đa tạp Hermite. Đã có một số kết quả đạt được theo hướng này trong thời gian qua nhưng câu trả lời đầy đủ cho hướng nghiên cứu này vẫn còn xa mới đạt được.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

A. Các công trình sử dụng trong luận án.

[1] Le Mau Hai, Nguyen Xuan Hong and Trieu Van Dung (2015), "Subextension of plurisubharmonic functions with boundary values in weighted pluricomplex energy classes", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 60(11), pp. 1580-1593.(SCIE)

[2] Le Mau Hai, Nguyen Van Khiem and Trieu Van Dung (2016), "Subextension of plurisubharmonic functions in unbounded hyperconvex domains and applications", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 61(8), 1116–1132.(SCIE)

[3] Le Mau Hai, Tang Van Long and Trieu Van Dung (2016), "Equations of complex Monge-Ampère type for arbitrary measures and applications", *Int. J. Math.*, 27(4), 1650035(13 pages).(SCI)

[4] Le Mau Hai, Trieu Van Dung (2018), "Subextension of m-subharmonic functions", submitted to Vietnam J.Math.

B. Các báo cáo kết quả của luận án trong các hội nghị, hội thảo.

[1] Trieu Van Dung (2014), *"Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới với giá trị biên trong lớp năng lượng phức có trọng"* , Báo cáo Hội nghị khoa học Khoa Toán – Tin, Trường ĐHSPHN.

[2] Trieu Van Dung (2016), *"Dưới thác triển các hàm đa điều hoà dưới trong miền siêu lồi không bị chặn và ứng dụng"*, Báo cáo Hội nghị khoa học Khoa Toán – Tin, Trường ĐHSPHN.

[3] Trieu Van Dung (2017), *"Phương trình kiểu Monge–Ampère cho độ đo tùy ý và ứng dụng"* , Báo cáo Hội nghị khoa học Khoa Toán - Tin, Trường ĐHSPHN.

[4] Trieu Van Dung (2018), *"Dưới thác triển của hàm m-điều hòa dưới"* , Báo cáo tại Đại hội toán học toàn quốc lần thứ 9, Nha Trang tháng 8 năm 2018.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Quang Diệu, Lê Mậu Hải (2009), *Cơ sở lý thuyết đa thế vị*, Nxb ĐHSP, Hà Nội.

[2] H. Amal (2014), "On subextension and approximation of plurisubharmonic functions with given boundary values", *Ann. Polon. Math.*, 110(3), pp. 247 - 258.

[3] P. Åhag and R. Czyż (2006), "The connection between the Cegrell classes and compliant functions", *Math. Scand.*, 99, pp. 87 - 98.

[4] P. Åhag and R. Czyż (2007), "On the Cegrell classes", *Math. Z.*, 256, pp. 243 - 264.

[5] P. Åhag, U. Cegrell, R. Czyż and P. H. Hiep (2009), "Monge-Ampère measures on pluripolar sets", *J. Math. Pures Appl.*, 92, pp. 613 - 627.

[6] E. Bedford and B. A. Taylor (1976), "The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation", *Invent. Math.*, 37, pp. 1 - 44.

[7] E. Bedford and B. A. Taylor (1979), "The Dirichlet problem for an equation of complex Monge-Ampère type", in: Partial Differential Equations and Geometry (Park City,UT, 1977), *Lecture Notes Pure Appl. Math.*, 48, Dekker, New York, pp. 39 – 50.

[8] E. Bedford and B. A. Taylor (1982),"A new capacity for plurisubharmonic functions", *Acta Math.*, 149, pp. 1 - 40.

[9] S. Benelkourchi (2006), "A note on the approximation of plurisubharmonic functions", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 342, pp. 647 - 650.

[10] S.Benelkourchi (2009), "Weighted Pluricomplex Energy", *Potential Anal.*, 31(1), pp. 1 - 20.

[11] S.Benelkourchi (2011), "Approximation of weakly singular plurisubharmonic functions", *Internat. J. Math.*, 22(7), pp. 937 - 946.

[12] S. Benelkourchi (2014), "Weak solution to the complex Monge-Ampère equation on hyperconvex domains", *Ann. Polon. Math.*, 112(3), pp. 239 - 246.

[13] S. Benelkourchi, V.Guedj and A.Zeriahi (2009), "Plurisubharmonic functions with weak singularities", In: Proceedings from the Kiselmanfest, Uppsala University, Västra Aros, pp. 57 - 74.

[14] Z. Błocki (1998), *The complex Monge-Ampère Operator in Pluripotential Theory*, Lectures notes, unpublish. Website: http://www:/gamma.im.uj.edu.pl/∼błocki.

[15] Z. Błocki (2005), "Weak solutions to the complex Hessian equation", *Ann. Inst. Fourier(Grenoble).*, 55(3), pp. 1735 - 1756.

[16] Z. Błocki (2006), "The domain of definition of the complex Monge-Ampère Operator", *Amen.J.Math.*, 128, pp. 519 - 530.

[17] Z. Błocki (2009), "A note on maximal plurisubharmonic functions", *Uzbek. Math. J.*, 1, pp. 28 - 32.

[18] L.Caffarelli, J.J. Kohn, L. Nirenberg and J. Spruck (1985), "The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. II. complex Monge-Ampère and uniformly elliptic equation", *Comm. Pure Appl. Math.*, 38, pp. 209 - 252.

[19] U. Cegrell (1984), "On the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator", *Math.Z.*, 185, pp. 247 - 251.

[20] U. Cegrell (1998), "Pluricomplex energy", *Acta Math.*, 180, pp 187 - 217.

[21] U. Cegrell (2004), "The general definition of the complex Monge- Ampère operator", *Ann. Inst. Fourier(Grenoble)*, 54(1), pp. 159 - 179.

[22] U. Cegrell (2005), "Convergence in capacity", *arXiv: math/0505218v1.*

[23] U. Cegrell (2008), "A general Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator", *Ann. Pol. Math.*, 94(2), pp. 131 - 147.

[24] U. Cegrell (2012), "Convergence in Capacity", *Canad. Math. Bull.*, 55(2), pp. 242 - 248.

[25] U. Cegrell and L. Hed (2008), "Subextension and approximation of negative plurisubharmonic functions", *Michigan Math. J.*, 56, pp. 593 - 601.

[26] U. Cegrell, S. Kołodziej and A. Zeriahi (2005), "Subextension of plurisubharmonic functions with weak singularities", *Math. Z*, 250(1), pp. 7-22.

[27] U. Cegrell and A. Zeriahi (2003), "Subextension of plurisubharmonic functions with bounded Monge-Ampère operator mass", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 336, pp. 305-308.

[28] U. Cegrell and S. Kołodziej (1994), "The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator: Perron classes and rotation-invariant measures", *Michigan Math. J.*, 41, pp. 563-569.

[29] U. Cegrell and S. Kołodziej (2006), "The equation of complex Monge-Ampère type and stability of solutions", *Math. Ann.*, 334, pp. 713-729.

[30] S. T. Cheng and S. T. Yau (1980), "On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation", *Comm. Pure Appl. Math.*, 33, pp. 507-544.

[31] Chinh, L. H (2013), "On Cegrells classes of m - subharmonic functions", *arXiv:1301.6502v1.*

[32] Chinh H. Lu (2015), "A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$", *J. Math. Anal. Appl.*, 431, pp. 228-259.

[33] Ngoc Cuong Nguyen (2012), "Subsolution theorem for the complex Hessian equation", *Univ. Iag. Acta. Math. Fasciculus L*, pp. 69-88.

[34] R. Czyż and L. Hed (2008), "Subextension of plurisubharmonic functions without increasing the total Monge-Ampère mass", *Ann. Polon. Math.*, 94(3), pp. 275-281.

[35] R. Czyż (2009), *The complex Monge-Ampère operator in the Cegrell classes*, Dissertationes Math, 466, 83 pp.

[36] S. Dinew and S. Kołodziej (2014), "A priori estimates for the complex Hessian equations", *Anal. PDE.*, 7, pp. 227-244.

[37] L. Gårding (1959), "An inequality for hyperbolic polynomials", *J.Math and Mec*, 8(6), pp. 957-965.

[38] L. Hed (2010), "Approximation of negative plurisubharmonic functions with given boundary", *Int. J. Math.*, 21, pp. 1135–1145.

[39] H. El Mir (1980), "Fonctions plurisousharmoniques et ensembles pluripolaires", *Sesminaire Lelong - Skoda, lucture Notes in Math.*, 822, Springer - verlag, pp. 61-76.

[40] Le Mau Hai and Tang Van Long (2011), "The Subextension Problem for the Class $\mathcal{E}^{\psi}$", *Vietnam. J. Math.*, 39(3), pp. 251-166.

[41] L. M. Hai and N. X. Hong (2014), "Subextension of plurisubharmonic functions without changing the Monge-Ampère measures and applications", *Ann. Polon. Math*, 112(1), pp. 55-66.

[42] L. M. Hai and P. H. Hiep (2011), "Some Weighted Energy Classes of Plurisubharmonic Functions", *Potential Anal.*, 34(1), pp. 43-56.

[43] L. M. Hai, P. H. Hiep, N. X. Hong and N. V. Phu (2014), "The Monge-Ampère type equation in the weighted pluricomplex energy class", *Int. J. Math.*, 25(5), pp.

[44] L. M. Hai, N. V. Trao and N. X. Hong (2014), "The complex Monge-Ampère equation in unbounded hyperconvex domains in $\mathbb{C}^n$", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 59, pp. 1758-1774.

[45] Pham Hoang Hiep (2010), "Convergence in capacity and applications", *Math. Scand.*, 107, pp. 90-102.

[46] P. H. Hiep (2008), "Pluripolar sets and the subextension in Cegrell's classes", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 53, 675-684.

[47] N. V. Khue and P. H. Hiep (2009), "A comparison principle for the complex Monge-Ampère operator in Cegrell's classes and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(10), pp. 5539-5554.

[48] M. Klimek (1991), *Pluripotential Theory*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, Oxford Science Publications.

[49] S. Kołodziej (1995), "The range of the complex Monge-Ampère operator", II, *Indiana Univ. Math. J.*, 44(3), pp. 765-782.

[50] S. Kołodziej (2005), *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory*, Mem. Amer. Math. Soc., 178, x+64pp.

[51] S. Kołodziej (1998), "The complex Monge-Ampère equation", *Acta Math.*, 180, pp. 69-117.

[52] S. Kołodziej (2000), "Weak solutions of equations of complex Monge-Ampère type", *Ann. Polon. Math.*, 73, pp. 59-67.

[53] A. S. Sadullaev and B. I. Abullaev (2012), "Potential theory in the class of m-subharmonic functions", *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 279, pp. 166-192.

[54] N.V. Shcherbina (2005), "Pluripolar graphs are holomorphic", *Acta Math.*, 194, pp. 203-216.

[55] Vu Viet Hung (2016), "Local Property of a Class of m-Subharmonic Functions", *Vietnam. J. Math*, 44(3), pp. 603–621.

[56] Vu Viet Hung and Nguyen Van Phu (2017), "Hessian measures on m-polar sets and applications to the complex Hessian equations", *Complex Var. Elliptic Equ.*, 62(8), pp. 1135-1164.

[57] W. Rudin (1991), *Functional Analysis*, McGraw-Hill.

[58] J.Wiklund (2006), "On subextension of pluriharmonic and plurisubharmonic functions", *Ark. Math.*, 44, pp. 182-190.

[59] Y. Xing (1996), "Continuity of the complex Monge-Ampère operator", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(2), pp. 457-467.

[60] Y. Xing (2008), "Convergence in capacity", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(5), pp. 1839-1861.

[61] Y. Siu (1975), "Extension of meromorphic maps into Kähler manifolds", *Ann. Of Math.*, 102, pp. 421-462.

[62] S. T. Yau (1978), "On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Anpère equation. I", *Comm. Pure Appl. Math.*, 31, pp. 339-411.